

# Zur Ermittlung der Auflagerkraft- Einflußflächen schiefwinkliger Platten

Hain, Hans

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 15, 1963,  
S.80-132



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Zur Ermittlung der Auflagerkraft-Einflußflächen schiefwinkliger Platten\*)

Von Hans Hain

Vorgelegt von Herrn A. Pflüger

(Eingegangen am 26. 3. 1964)

**Übersicht:** Auf der Grundlage der klassischen Plattentheorie werden die Möglichkeiten zur Ermittlung der Auflagerkraft-Einflußflächen schiefwinkliger Platten untersucht. Am Beispiel der zweiseitig gelenkig gelagerten Platte mit zwei freien schiefen Rändern wird gezeigt, daß die bisher in der Literatur angegebenen Verfahren hier versagen. Es wird ein geschlossener Ausdruck für die Randquerkraft-Singularität hergeleitet, der in Verbindung mit höheren Singularitäten als Ansatzfunktionen für den regulären Anteil der Einflußfunktion zu brauchbaren Ergebnissen führt.

*Summary:* On the basis of the classical theory of plates, the possibilities of calculating influence surfaces for vertical reactions of skew plates are investigated. A plate, which has two simply supported and two free edges and is shaped like a parallelogram, is chosen as an example. In this case, as is shown, the methods mentioned in the literature fail. A rigorous expression for the singularity of the boundary shearing force is developed, thus leading to practical results when higher singularities are used for the regular part of the influence function.

## Zusammenstellung der Bezeichnungen

Symbol	Dim.	Erklärung
$a$	[m]	Plattenbreite
$a_1 - a_3$		Abk. (Def. S. 94)
$b, b_i$		Abk. (Def. S. 86, S. 90)
$c, c_i$		Abk. (Def. S. 86, S. 90)
$c_0, c_1, c_2$		Abk. (Def. S. 92)
$\bar{c}$		Abk. (Def. S. 93)
$c_{01}, c_{02}$		Abk. (Def. S. 97)
$f_i, f_k$	[m]	Ansatzfunktionen für die Biegefläche
$i$	[—]	Index für Reihenglieder des Regulariteiles
$j$	[—]	Intervallindex bei Teilstreckenkollokation
$k$	[—]	Beliebige Kraft- oder Verformungsgröße der Platte
$k_1 - k_7$		Abk. (Def. S. 94)
$m_x, m_y$	[mkp/m]	Plattenbiegemomente

\*) Von der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigte Dissertation. Referent Prof. Dr.-Ing. habil. A. Pflüger; Korreferent Prof. Dr.-Ing. W. Zerna; (Tag der mündlichen Prüfung 20. 12. 63).

Symbol	Dim.	Erklärung
$m_{xy}$	[mkp/m]	Plattendrillmoment
$n$	[m]	Koordinate <i>normal</i> zum <i>schiefen</i> Rand
$n$	[—]	Reihenindex
$p$	[kp/m <sup>2</sup> ]	Flächenbelastung
$q_x, q_y$	[kp/m]	Plattenquerkräfte
$\bar{q}_x, \bar{q}_y$	[kp/m]	Randquerkräfte
$s$	[m]	Koordinate <i>parallel</i> zum <i>schiefen</i> Rand
$s_0, s_1, s_2$		Abk. (Def. S. 92)
$s_j, s_{jl}, s_{jr}$	[m]	Streckenbezeichnungen bei der Teilstreckenkollokation
$\bar{s}$		Abk. (Def. S. 93)
$u, v$	[m]	Koordinaten des Aufpunktes
$w$	[m]	Durchbiegung
„ $w$ “	[m]	Einheitsdurchbiegung
$x, y$	[m]	Rechtwinklige Koordinaten
$A_i, B_i, \left. \begin{matrix} C_i, D_i \end{matrix} \right\}$	[—]	Ansatzkonstanten
$C_1, C_2$	[—]	Konstanten
$D$		Symbol für linearen Differentialoperator
$F$	[m <sup>2</sup> ]	Flächenbereich
$H_i$	[—]	Abk. (Def. S. 95)
$K_0$	[m/kp]	Klassische Singularität der unendlich ausgedehnten Platte
$K^{\text{II}}$	[m/kp]	Modifizierte Singularität der Halbebene mit gelenkig gelagertem Rand
$K^{\text{IV}}$	[m/kp]	Modifizierte Singularität des gelenkig gelagerten Halbstreifens
„ $M$ “	[mkp]	Äußeres Einheitsmoment
$N$	[mkp]	Plattenbiegesteifigkeit
„ $P$ “	[kp]	Äußere Einheitslast
$P_i$	[kp]	Einzellast-Singularität
$R_j$		Randwertresultierende im Intervall $j$
$R$		Regularteil der Einflußfläche
$S$		Singularteil der Einflußfläche
$\alpha_k$	[—]	Außenwinkel der polygonalen Bereiche bei der konformen Abbildung
$\varepsilon$	[—]	Schiefenwinkel
$\lambda$	[—]	Gewichtsfaktor bei der Fehlerquadratmethode
$\mu$	[—]	Querdehnungszahl
$\xi, \eta$	[m]	Kartesische Koordinaten in der Abbildungsebene
$\zeta$		Abbildungsfunktion
$\Phi$		Minimalfunktion
$\Pi_i$	[mkp]	Inneres Potential
$\Pi_a$	[mkp]	Äußeres Potential
$[k]$		Einflußfläche für die Kraft- oder Verformungsgröße $k$

## 1. Einleitung

Nachdem in der Brückenbaupraxis des vergangenen Jahrzehnts der Mangel an genaueren theoretischen Untersuchungen schiefwinkliger Platten immer fühlbarer wurde, sind in der letzten Zeit eine Reihe von Arbeiten über dieses Gebiet erschienen. Einige frühere Arbeiten [6], [7], [9], [11] und [13] geben für bestimmte Lastfälle Lösungen des Randwertproblems der schiefwinkligen Platte an. Nun ist für die Praxis die Kenntnis von Einflußflächen von sehr viel größerer Bedeutung als die Lösung eines speziellen Problems.

Zuerst beschäftigt sich *Graudenz* [12] 1948 mit Einflußflächen für schiefwinklige Bereiche. Wie auch alle späteren Arbeiten baut er auf der von *Pucher* [8] eingeführten *Singularitätenmethode* auf. Er stellt fest, daß die Methode der Differenzenrechnung für die schiefwinkligen Platten — und insbesondere für die eingespannten — unvorteilhaft zu sein scheint. Brauchbare Lösungen erzielt er jedoch mit Hilfe eines Ansatzes biharmonischer Polynome in Verbindung mit der Fehlerquadratmethode zur Erfüllung der Randbedingungen.

1955 wendet *Büscher* [17] den von *Haeussler* [14] 1951 gemachten Vorschlag, den Regularteil der Einflußflächen aus singulären Lösungen der Plattengleichung zusammenzusetzen, auf schiefwinklige Platten an. Als singuläre Lösungen verwendet er dabei Biegeflächen infolge von Einzellasten außerhalb des betrachteten Bereiches.

*Kärrholm* [18] schlägt 1956 für zweiseitig gelagerte Platten eine kombinierte Methode vor, bei der die Platte parallel zu den freien Rändern in Streifen zerlegt und dann in der einen Richtung die Differenzenmethode angewendet wird, während für die übrigenbleibenden gewöhnlichen Differentialgleichungen trigonometrische Reihenansätze gemacht werden.

Auf der Grundlage eines von *Schultz-Grunow* [15] angegebenen Verfahrens, mit Hilfe der konformen Abbildung Greensche Funktionen zu ermitteln, berechnet *Heinen* [19] 1957 einige Einflußflächen für eine allseitig eingespannte schiefwinklige Platte.

*Maas* [22] verwendet 1962 in einem Teil seiner Arbeit ebenfalls die Methode der konformen Abbildung, um Einflußflächen für zweiseitig gelenkig gelagerte Platten mit zwei freien Rändern zu berechnen.

Die genannten Arbeiten [12], [17], [18], [19] und [22] beschäftigen sich mit einer Ausnahme ausschließlich mit Einflußflächen für Durchbiegungen, Biege- und Drillmomente für den Aufpunkt in Plattenmitte. Lediglich *Büscher* [17] ermittelt Einflußflächen für das Stützmoment und die Querkraft in Randmitte einer allseits eingespannten Platte. Es fehlen insbesondere Untersuchungen über die Verteilung der Auflagerkräfte, deren Kenntnis aber für die Brückenbaupraxis von Bedeutung ist. Vor einigen Jahren sind bei schiefwinkligen Brückenbauten Schadensfälle aufgetreten, weil die Auflager zu schwach bemessen waren. Bei Neubauten werden daher jetzt immer Modellversuche durchgeführt. Dadurch sind inzwischen gewisse Einzelheiten der Auflagerkraftverteilung — wie z. B. ihre starke Konzentrierung in den stumpfen Ecken — allgemein bekanntgeworden. Noch fehlen jedoch allgemeine theoretische Unterlagen. Um diese Lücke auszufüllen, wurde für die vorliegende

Arbeit als Aufgabe gewählt, die Möglichkeiten zur Berechnung von Einflußflächen der *Auflagerkräfte* schiefwinkliger Platten zu untersuchen.

Wie aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit hervorgeht, wachsen die Schwierigkeiten bei der Ermittlung von Einflußflächen für schiefwinklige Bereiche einmal mit der Ordnung der Ableitung der betrachteten Schnittgröße und der in den zu erfüllenden Randbedingungen vorkommenden Randgrößen und weiterhin mit abnehmender Entfernung des Aufpunktes von den schiefen Rändern. Die ungünstigste Kombination dieser verschiedenen Einflüsse ergibt sich, wenn man beispielsweise die Einflußfläche der Auflagerkraft einer zweiseitig gelenkig gelagerten Platte mit zwei freien Rändern für den Aufpunkt in der Nähe der spitzen oder stumpfen Ecke betrachtet. Dieser Fall wird speziell in der vorliegenden Arbeit untersucht. Dabei werden im wesentlichen die folgenden drei Teilaufgaben behandelt.

1. Die Aufstellung einer dem gegebenen Problem möglichst weitgehend angepaßten singulären Lösung\*).
2. Die Konstruktion geeigneter Ansatzfunktionen für den Regulateil.
3. Die Auswahl der wirksamsten Methode zur Erfüllung der Randbedingungen. Insbesondere bei der Lösung der zweiten und dritten Teilaufgabe werden neue Möglichkeiten untersucht.

Nach einer Zusammenstellung der Grundlagen und Annahmen in Abschnitt 2 behandeln die folgenden Abschnitte 3, 4 und 5 die obenerwähnten drei Teilaufgaben. In Abschnitt 6 werden die von anderen Autoren verwendete Methode der konformen Abbildung kurz gestreift und die Grenzen ihrer Anwendungsmöglichkeiten aufgezeigt. Der Abschnitt 7 enthält die Ergebnisse numerischer Beispielrechnungen und der abschließende Abschnitt 8 einige Angaben zur Auswertung der Einflußflächen.

## 2. Problemstellung und Grundlagen

Die in dieser Arbeit untersuchten Verfahren zur Ermittlung von Einflußflächen setzen die Gültigkeit der Vereinfachungen der klassischen Plattentheorie, d. h. der Theorie der dünnen Platte mit kleiner Durchbiegung, voraus. Diese Vereinfachungen und die Ergebnisse dieser Theorie seien hier als bekannt vorausgesetzt.

In der vorliegenden Arbeit sollen Einflußflächen für wandernde Einzellasten betrachtet werden. Die Grundlagen der Methoden zu ihrer Ermittlung seien im folgenden noch kurz zusammengestellt. Diese Verfahren gehen im wesentlichen auf *Nemenyi* [3], [4] und *Pucher* [5], [8] zurück und werden allgemein als

\*) Diese Bezeichnung stimmt nicht mit der mathematischen Definition einer „singulären Lösung“ als Einhüllende aller speziellen Lösungen überein, sondern bedeutet hier — dem in der Einflußflächen-Literatur üblichen Gebrauch folgend — nur, daß diese Lösung der homogenen Plattendifferentialgleichung innerhalb des betrachteten Bereichs eine singuläre Stelle aufweist.

Singularitätenmethode bezeichnet. Sie stellen praktisch eine Erweiterung der in der Stabstatik seit langem gebräuchlichen Methoden zur Berechnung von Einflußlinien auf zweidimensionale Tragwerke dar. Auf Grund des Maxwell'schen Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungsarbeiten und mit Hilfe einfacher Grenzwertbetrachtungen lassen sich folgende Sätze ableiten:

1. Die Biegefläche einer Platte unter der Einzellast  $P$  im Punkte  $(u, v)$  ist gleich der Einflußfläche für die Durchbiegung im Punkte  $(u, v)$  infolge wandernder Einzellast.

$$K(x, y; u, v) = K(u, v; x, y) \quad (1)$$

2. Die Einflußfelder infolge senkrechter Einzellasten für aus der Durchbiegung der Platte durch Differentiation gewonnene Verformungs- und Kraftgrößen erhält man durch entsprechende Differentiation der Biegefläche infolge der Einzellast nach den Koordinaten des Aufpunktes  $(u, v)$ .

Bedeutet  $D$  einen beliebigen, linearen Differentialoperator zur Gewinnung einer bestimmten Kraft- oder Verformungsgröße  $k$  aus der Durchbiegungsfunktion  $w(x, y)$ , so daß also gilt

$$k(x, y) = D_{(x,y)} \{w(x, y)\}, \quad (2)$$

dann läßt sich der zweite Satz in folgender Form schreiben:

$$[k] = D_{(u,v)} \{K(x, y; u, v)\} \quad x, y = \text{const.} \quad (3)$$

Hierin bedeuten  $[k]$  die Einflußfläche für die Größe  $k$  im Punkte  $(u, v)$ ,  $D_{(u,v)}$  den Differentialoperator, der aus  $D_{(x,y)}$  hervorgeht, wenn man  $x$  und  $y$  mit  $u$  und  $v$  vertauscht, und  $K(x, y; u, v)$  die Biegefläche infolge der Einzellast im Punkte  $(u, v)$ .

Der Vollständigkeit halber sei noch der bekannte Zusammenhang zwischen der Einflußfunktion und der Lösung für den Normalfall der inhomogenen Platten-Differentialgleichung  $\Delta \Delta w = (1/N) p(x, y)$  angegeben:

$$w(u, v) = \iint_F K(x, y; u, v) p(x, y) dx dy. \quad (5)$$

In mathematischer Ausdrucksweise wird  $K(x, y; u, v)$  als Greensche Funktion der Differentialgleichung (4) bezeichnet. Die Greensche Funktion hat die Eigenschaft, in allen Punkten des betrachteten Bereichs  $F$  die homogene Differentialgleichung  $\Delta \Delta K = 0$  zu erfüllen, mit Ausnahme des Punktes  $(u, v)$ , in dem sie eine singuläre Stelle besitzt. Man bezeichnet sie daher auch als singuläre Lösung (vgl. jedoch Fußnote S. 83).

Da sich der Maxwell'sche Satz natürlich auch bei beliebigen anderen Lastwirkungen anwenden läßt, können die oben angegebenen beiden Sätze noch folgendermaßen erweitert werden (vgl. [3]):

3. Die Wirkungsfläche\*)  $s$  einer Platte unter einer bestimmten singulären Lastwirkung  $R = 1$  im Punkte  $(u, v)$  ist gleich der Einflußfläche für die Wirkung  $r$  an der Stelle  $(u, v)$  infolge wandernder Singularität  $S = 1$ .

Hierin bedeuten  $S, s$  und  $R, r$  Paare von einander dual zugeordneten Größen. Die Zuordnung ergibt sich auf Grund der Herleitung aus den Arbeitssätzen so, daß die Produkte  $S s$  und  $R r$  jeweils die Dimension einer Arbeit erhalten. Zur Erläuterung sei noch als Beispiel die Einflußfläche für die Neigung  $\partial w / \partial x$  einer Platte infolge wandernder Einzellast betrachtet. Es gilt dann folgende Zuordnung:

$r \triangleq$  Neigung ( $\partial w / \partial x$ ),       $R \triangleq$  angreifendes Einzelmoment ( $M$ ),

$s \triangleq$  Durchbiegung ( $w$ ),       $S \triangleq$  Einzellast ( $P$ ).

Nach Satz 3 gilt dann, daß die gesuchte Einflußfläche für die Neigung  $\partial w / \partial x$  im Punkte  $(u, v)$  infolge senkrechter Einzellast gleich der Biegefläche der Platte unter einem entsprechenden Einzelmoment in  $(u, v)$  ist.

Dieses Einflußfeld hätte man auch nach Satz 2 rein formal durch Differentiation der Biegefläche nach der Aufpunktskoordinate  $u$  erhalten können. Der Satz 3 liefert aber außer der Verallgemeinerung auf beliebige Singularitäten noch eine anschauliche Deutung der Einflußfelder. Die in der Praxis wohl in der Hauptsache interessierenden Einflußflächen für wandernde Einzellasten lassen sich danach als Biegeflächen infolge singulärer Lastwirkungen deuten. Damit liefert die Zusammenfassung der Sätze 2 und 3 noch die für das Weitere wichtige Aussage, daß alle Einflußflächen auf Grund der Belastungssingularität singuläre Integrale der homogenen Differentialgleichung darstellen — was sie als Greensche Funktionen kennzeichnet — und daß sie den gleichen Randbedingungen genügen, wie die Ausgangsbiegefläche.

Diese Ausgangssingularität wird im allgemeinen nicht allen Randbedingungen des betrachteten Bereichs genügen. Zur vollständigen Lösung des Randwertproblems muß die singuläre Lösung daher noch durch eine Linearkombination regulärer Funktionen ergänzt werden, die sämtlich im betrachteten Bereich die homogene Differentialgleichung befriedigen müssen.

$$K(x, y, u, v) = S(x, y, u, v) + R(x, y) \quad (6)$$

$$R = \sum_i c_i w_i(x, y) \quad (7)$$

Im folgenden wird  $S$  als Singularteil und  $R$  als Regularteil der Gesamtlösung bezeichnet.

---

\*) Wirkungsfläche: übergeordneter Begriff für die Zustandsflächen für beliebige Verformungs- oder Kraftgrößen der Platte (z. B. Biegefläche, Biegemomentenfläche usw.).

### 3. Der Singularteil der Einflußflächen

#### 3.1 Die klassische Singularität

Die klassische Singularität der Plattentheorie stellt die Biegefläche der unendlich ausgedehnten Platte unter einer Einzellast dar.

$$K_0 = \frac{1}{8\pi N} [(x-u)^2 + (y-v)^2] \ln \frac{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}}{h} \quad (8)$$

Diese Funktion ist zentralsymmetrisch und erfüllt daher bei einem polygonal begrenzten Plattenbereich keinerlei Randbedingungen. Um den Rechenaufwand bei der Bestimmung des Regularteils möglichst geringzuhalten, ist es zweckmäßig, von einer singulären Lösung auszugehen, die bereits einem Teil der Randbedingungen des betrachteten Bereichs genügt. Dazu muß die klassische Singularität durch reguläre Funktionsanteile erweitert werden. Man gelangt so zu sogenannten modifizierten Singularitäten.

#### 3.2 Modifizierte Singularitäten

Wie schon in der Einleitung erwähnt, soll in der vorliegenden Arbeit die zweiseitig gelenkig gelagerte schiefwinklige Platte mit zwei freien Rändern untersucht werden. Man kann daher beispielsweise von einer modifizierten Singularität ausgehen, die bereits die Randbedingungen an einem der gelagerten Ränder ( $w = 0$ ,  $\Delta w = 0$ ) erfüllt. Eine solche Singularität erhält man durch Überlagerung zweier klassischer Singularitäten, die antisymmetrisch zum gelagerten Rand  $y = 0$  (vgl. Abb. 1) angeordnet werden:

$$K^{II} = \frac{1}{16\pi N} \left\{ b \ln \frac{b}{h^2} - c \ln \frac{c}{h^2} \right\}, \quad (9)$$

mit

$$b = (x-u)^2 + (y-v)^2 \text{ und}$$

$$c = (x-u)^2 + (y+v)^2.$$

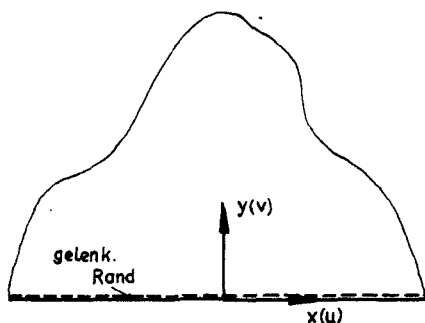


Abb. 1. Koordinatensystem

Um zur Randquerkraft-Singularität zu gelangen, muß  $K^{II}$  der bekannten Beziehung für die Randquerkraft entsprechend nach den Aufpunktskoordinaten  $u, v$  abgeleitet werden.

\*)  $h$  ist eine Bezugsgröße mit der Dimension einer Länge.



$$[\bar{q}_y]^{II} = -N \left\{ \frac{\partial^3 K^{II}}{\partial v^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 K^{II}}{\partial v \partial u^2} \right\} \quad (10)$$

Die Differentiation liefert

$$[\bar{q}_y]^{II} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ 2 \left[ \frac{(y-v)^3}{b^2} + \frac{(y+v)^3}{c^2} \right] - 3 \left[ \frac{y-v}{b} + \frac{y+v}{c} \right] + \right. \\ \left. + (2 - \mu) \left\langle 2(x-u)^2 \left[ \frac{y-v}{b^2} + \frac{y+v}{c^2} \right] - \left[ \frac{y-v}{b} + \frac{y+v}{c} \right] \right\rangle \right\} \quad (11)$$

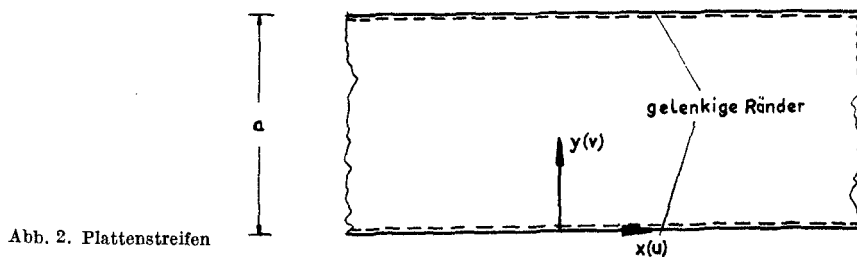
Läßt man nun den Aufpunkt zum gelenkig gelagerten Rand hin wandern, so erhält man die sog. entartete\*), modifizierte Singularität der Randquerkraft.

$$[\bar{q}_y]^{III} = -\frac{y}{2\pi} \left\{ 2 \frac{y^2}{[(x-u)^2 + y^2]^2} - 3 \frac{1}{(x-u)^2 + y^2} + \right. \\ \left. + (2 - \mu) \left\langle \frac{(x-u)^2 - y^2}{[(x-u)^2 + y^2]^2} \right\rangle \right\} \quad (12)$$

Die Rechnungen mit diesem Singularteil (vgl. Abschnitt 7) haben zu keinem befriedigenden Ergebnis geführt. Es liegt der Gedanke nahe, die singuläre Lösung noch weiter zu modifizieren, d. h. einen Singularteil zu konstruieren, der möglichst schon die Randbedingungen an *beiden* gelagerten Rändern erfüllt. Dabei wird von der Biegefläche des Plattenstreifens ausgegangen, die bereits von *Nadai* [1] in entwickelter Form angegeben wurde. Mit den Bezeichnungen der Abb. 2 gilt

$$K^{IV} = \frac{a^2}{2\pi^3 N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[ 1 \mp \frac{n\pi}{a} (x-u) \right] \sin \frac{n\pi}{a} v \sin \frac{n\pi}{a} y e^{\pm \frac{n\pi}{a} (x-u)} \quad (13)$$

für  $(x-u) \lesseqgtr 0$ .



\*) Von entarteter Singularität wird gesprochen, wenn der Aufpunkt auf einem Rande liegt. Der entartete Singularteil muß sowohl die Randbedingungen, als auch die Singularitätsbedingung erfüllen.

Aus (13) ließen sich nun in üblicher Weise die höheren Singularitäten ableiten. Für die praktische Rechnung wären diese jedoch nicht geeignet, da die Reihenentwicklungen in der Nähe des Aufpunktes nur sehr schlecht konvergieren.

Es gibt jedoch für die höheren Singularitäten zum Teil geschlossene Ausdrücke, die *Nadai* [1] mit Hilfe konformer Abbildung abgeleitet hat. So gilt z. B. für die Momentensumme:

$$N \Delta K^{\text{IV}} = \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ \frac{\cosh \frac{\pi}{a} (x-u) - \cos \frac{\pi}{a} (y-v)}{\cosh \frac{\pi}{a} (x-u) - \cos \frac{\pi}{a} (y+v)} \right\}. \quad (14)$$

Hieraus lassen sich zunächst die Singularitäten der Querkräfte ableiten.

$$\begin{aligned} [q_y]^{\text{IV}} &= -N \frac{\partial (\Delta K^{\text{IV}})}{\partial v} = \\ &= \frac{1}{4a} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{a} (y-v)}{\cosh \frac{\pi}{a} (x-u) - \cos \frac{\pi}{a} (y-v)} + \frac{\sin \frac{\pi}{a} (y+v)}{\cosh \frac{\pi}{a} (x-u) - \cos \frac{\pi}{a} (y+v)} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

Entsprechend erhält man  $[q_x]^{\text{IV}}$ . Für die Randquerkraft-Singularität gilt

$$[\bar{q}_y]^{\text{IV}} = [q_y]^{\text{IV}} + \frac{\partial [m_{yx}]^{\text{IV}}}{\partial u}. \quad (16)$$

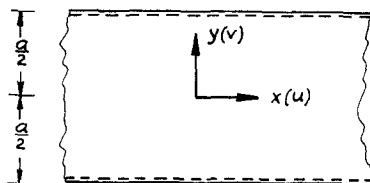
Man benötigt also noch die Singularität für das Drillmoment des Plattenstreifens. Ein geschlossener Ausdruck hierfür ist schon von *Pucher* [10] — allerdings fehlerhaft — angegeben worden. Die richtige Form läßt sich unschwer finden und lautet mit den Bezeichnungen der Abb. 2

$$\begin{aligned} [m_{xy}]^{\text{IV}} &= -N (1-\mu) \frac{\partial^2 K^{\text{IV}}}{\partial u \partial v} = \\ &= \frac{1-\mu}{8a} (x-u) \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{a} (y+v)}{\cos \frac{\pi}{a} (y+v) - \cosh \frac{\pi}{a} (x-u)} + \frac{\sin \frac{\pi}{a} (y-v)}{\cos \frac{\pi}{a} (y-v) - \cosh \frac{\pi}{a} (x-u)} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Hiermit kann nun (16) gebildet werden und man erhält, wenn man noch zur Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Systems den Koordinaten-

ursprung in die Mitte des Plattenstreifens legt und die neuen Koordinaten (vgl. Abb. 3) wieder mit  $x, y$  und  $u, v$  bezeichnet

Abb. 3. Verschobenes Koordinatensystem



$$\begin{aligned}
 [\bar{q}_y]^{IV} = \frac{3-\mu}{8a} & \left\{ -\frac{\sin \frac{\pi}{a}(y+v)}{\cosh \frac{\pi}{a}(x-u) + \cos \frac{\pi}{a}(y+v)} + \frac{\sin \frac{\pi}{a}(y-v)}{\cosh \frac{\pi}{a}(x-u) - \cos \frac{\pi}{a}(y-v)} \right\} - \\
 - (1-\mu) \frac{\pi}{8a^2} (x-u) \sinh \frac{\pi}{a}(x-u) & \left\{ -\frac{\sin \frac{\pi}{a}(y+v)}{\left[ \cosh \frac{\pi}{a}(x-u) + \cos \frac{\pi}{a}(y+v) \right]^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin \frac{\pi}{a}(y-v)}{\left[ \cosh \frac{\pi}{a}(x-u) - \cos \frac{\pi}{a}(y-v) \right]^2} \right\}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Die entartete Singularität für den Aufpunkt auf einem der gelenkig gelagerten Ränder ergibt sich für  $v = 0$  aus (18).

## 4. Der Regulateil der Einflußflächen

### 4.1 Die homogene Lösung

Der Regulateil muß, wie schon erwähnt, die homogene Plattendifferentialgleichung befriedigen und außerdem, um den Vorteil, der bei der Modifizierung des Singularteils erreicht worden ist, nicht wieder zu verlieren, auch den Randbedingungen des Plattenstreifens genügen. Unter diesen Bedingungen erhält man mit der allgemeinen, homogenen Lösung als Regulateil folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}
 [\bar{q}_y] = [\bar{q}_y]^{IV} + \sum_{i=1}^{\infty} & \left\{ A_i \sinh \frac{i\pi}{a} x + B_i \cosh \frac{i\pi}{a} x + \right. \\
 & \left. + C_i x \sinh \frac{i\pi}{a} x + D_i x \cosh \frac{i\pi}{a} x \right\} \sin \frac{i\pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

## 4.2 Einzellast-Singularitäten außerhalb des Bereichs

Schon von *Haeussler* [14] ist darauf hingewiesen worden, daß man zur Bildung des Regularteils singuläre Lösungen, die ja der homogenen Differentialgleichung genügen, heranziehen kann, sofern nur deren Singularitäten außerhalb des gerade betrachteten Bereichs liegen, so daß sie die Regularität im Bereich nicht stören. *Büscher* [17] hat dieses Verfahren zum erstenmal bei schiefwinkligen Platten angewendet und bei der Berechnung zweier Einflußfelder für die Randmitte einer allseits eingespannten Platte gute Ergebnisse damit erzielt. Im ersten Teil der Beispielrechnungen (vgl. Abschnitt 7) ist diese Methode unter den wesentlich ungünstigeren Bedingungen der vorliegenden Aufgabenstellung untersucht worden. Der Singularteil (12) ist dabei durch einen Ansatz aus Einzellast-Singularitäten, die den gleichen Randbedingungen wie (12) genügen, ergänzt worden.

$$[\bar{q}_y] = [\bar{q}_y]_S^{\text{II}} + [\bar{q}_y]_K^{\text{II}} = [\bar{q}_y]_S^{\text{II}}(x, y, u, v) + \sum_{i=1}^{i_n} P_i K^{\text{II}}(x, y, u_i, v_i) \quad (20)$$

Hierin ist für  $[\bar{q}_y]_S^{\text{II}}$  der Ausdruck (12) zu setzen.  $K^{\text{II}}(x, y, u_i, v_i)$  stellt die Biegeflächen infolge der Einzellast-Singularitäten  $P_i = 1$  in den Aufpunkten  $(u_i, v_i)$  außerhalb des Bereichs dar (vgl. (9)):

$$K^{\text{II}}(x, y, u_i, v_i) = \frac{1}{16\pi N} \left\{ b_i \ln \frac{b_i}{h^2} - c_i \ln \frac{c_i}{h^2} \right\}, \quad (21)$$

mit

$$b_i = (x - u_i)^2 + (y - v_i)^2 \quad \text{und} \\ c_i = (x - u_i)^2 + (y + v_i)^2.$$

## 4.3 Höhere Singularitäten außerhalb des Bereichs

Man kann den Regularteil auch aus höheren Singularitäten aufbauen, d. h. also aus Einflußflächen nicht für die Durchbiegung — wie in 4.2 —, sondern für die aus der Durchbiegung abgeleiteten Verformungs- oder Kraftgrößen der Platte, deren Aufpunkte natürlich wieder außerhalb des Bereichs liegen müssen.

Um eine gewisse anschauliche Deutung dafür zu geben, weswegen es im vorliegenden Fall zweckmäßig erscheint, mit höheren Singularitäten zu arbeiten, muß auf die Erfüllung der zusätzlichen, d. h. nicht schon im modifizierten Singularteil enthaltenen Randvorschriften eingegangen werden. Die verwendeten Verfahren zur Erfüllung der Randbedingungen werden allerdings erst im nächsten Abschnitt besprochen.

Verwendet man als Singularteil (18), so sind noch zusätzlich die Randbedingungen der freien Plattenränder (vgl. Abb. 4) zu erfüllen, das bedeutet also, die Kräftebedingungen für das Biegemoment und die Randquerkraft. In diesem Fall haben die in 4.2 geschilderten Einzellast-Singularitäten einen ganz entscheidenden Nachteil. Betrachtet man nämlich die interessierenden Randgrößen von Biegemoment und Querkraft infolge zweier in nicht zu großer Entfernung vom Rande angeordneter Einzellasten, so ist das gegenseitige Verhältnis der Randgrößen in den beiden Fällen nicht sehr verschieden

voneinander. Mit anderen Worten, die Ansatzfunktionen sind „fast linear abhängig“ voneinander. Das ist nicht weiter verwunderlich, da man zur Erfüllung zweier verschiedener, voneinander unabhängiger Randbedingungen gleichartige — nur durch die Lage ihrer Aufpunkte unterschiedene — Ansatzfunktionen benutzt.

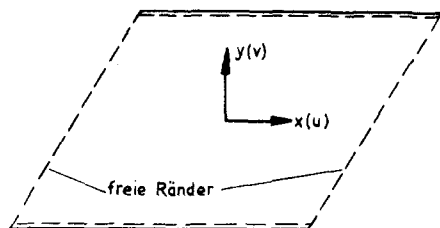


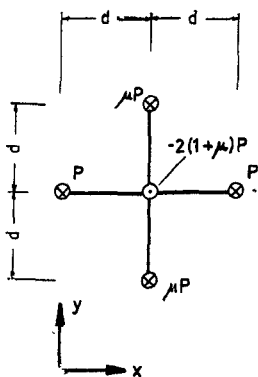
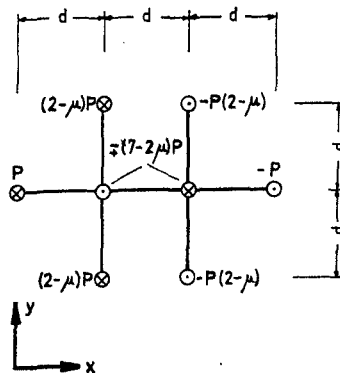
Abb. 4. Schiefwinklige Platte

Die Situation läßt sich etwas verbessern, wenn man die zweite Einzellast-Gruppe — die also zur Erfüllung der zweiten Randbedingung notwendig ist — in größerer Entfernung von der ersten anordnet. Das Verfahren wird dann allerdings in anderer Hinsicht numerisch instabil.

Der geschilderte Nachteil läßt sich nun durch die jetzt zu besprechenden höheren Singularitäten vermeiden. Verwendet man nämlich die den zu erzeugenden Größen zugeordneten Singularitäten, in unserem Falle des freien Plattenrandes also die höheren Singularitäten des Biegemomentes und der Randquerkraft des Plattenstreifens, so bringt man damit diese gewünschten Größen als innere Schnittgrößen im Aufpunkt direkt an. Damit ist natürlich die lineare Unabhängigkeit der Ansatzfunktionen gesichert.

Die Tatsache, daß diese Ansatzfunktionen im Aufpunkt selbst singulär sind, erfordert, daß die Aufpunkte — wie auch schon bei den Einzellast-Singularitäten — außerhalb des Bereichs angeordnet werden müssen.

Die geschilderten Verhältnisse lassen sich besonders anschaulich an einfachen Balken-Analogie-Beispielen übersehen, was hier jedoch, der Kürze halber, übergangen sei. Erwähnt sei nur, daß die zahlenmäßige Durchrechnung eines ganz willkürlich gewählten Balkenbeispiels sehr deutlich die numerische Unterlegenheit der Methode mit Ansatzfunktionen infolge „nicht zugehöriger“ Singularitäten gegenüber derjenigen mit Ansatzfunktionen infolge „zugehöriger“ Singularitäten zeigt.

Abb. 5. Höhere Singularität des Biegemomentes  $m_x$ Abb. 6. Höhere Singularität der Randquerkraft  $q_x$

Die Funktionen der höheren Singularitäten lassen sich als Biegeflächen infolge bestimmter Kräftegleichgewichtsgruppen deuten, die in einem Punkte angreifend zu denken sind, d. h. die für den Grenzfall zu Null werdender gegenseitiger Abstände zu betrachten sind. Zu den hier interessierenden Singularitäten des Biegemomentes und der Randquerkraft gehören die in Abb. 5 und 6 dargestellten singulären Kräftegruppen (vgl. [3] S. 489).

Wir wollen im folgenden den Singularteil (18) verwenden. Die Ansatzfunktionen müssen dann auch den Plattenstreifen-Randbedingungen genügen. Die gesuchten höheren Singularitäten des Plattenstreifens ergeben sich dann formal nach Satz 2 aus den entsprechenden Ableitungen der Plattenstreifen-Singularität nach den Aufpunktskoordinaten, die im folgenden mit den Bezeichnungen der Abb. 4 zusammengestellt seien. Zunächst werden noch einige Abkürzungen eingeführt.

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= \sinh \frac{\pi}{a} (x - u) & c_0 &= \cosh \frac{\pi}{a} (x - u) \\ s_1 &= \sin \frac{\pi}{a} (y + v) & c_1 &= \cos \frac{\pi}{a} (y + v) \\ s_2 &= \sin \frac{\pi}{a} (y - v) & c_2 &= \cos \frac{\pi}{a} (y - v) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 K^{IV}}{\partial u^2} &= -\frac{1}{8\pi N} \left\{ \ln \left[ \frac{c_0 + c_1}{c_0 - c_2} \right] + \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 \left[ \frac{1}{c_1 + c_0} + \frac{1}{c_2 - c_0} \right] \right\} \\ \frac{\partial^2 K^{IV}}{\partial u \partial v} &= -\frac{1}{8a N} (x - u) \left\{ \frac{s_1}{c_1 + c_0} + \frac{s_2}{c_2 - c_0} \right\} \\ \frac{\partial^2 K^{IV}}{\partial v^2} &= -\frac{1}{8\pi N} \left\{ \ln \left[ \frac{c_0 + c_1}{c_0 - c_2} \right] - \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 \left[ \frac{1}{c_1 + c_0} + \frac{1}{c_2 - c_0} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 K^{IV}}{\partial u^3} &= \frac{1}{8a N} \left\{ 2s_0 \left[ \frac{1}{c_0 + c_1} - \frac{1}{c_0 - c_2} \right] + \frac{\pi}{a} (x - u) \left[ \frac{c_0 c_1 + 1}{(c_0 + c_1)^2} + \frac{c_0 c_2 - 1}{(c_0 - c_2)^2} \right] \right\} \\ \frac{\partial^3 K^{IV}}{\partial u^2 \partial v} &= \frac{1}{8a N} \left\{ \frac{s_1}{c_0 + c_1} - \frac{s_2}{c_0 - c_2} - \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 \left[ \frac{s_1}{(c_0 + c_1)^2} - \frac{s_2}{(c_0 - c_2)^2} \right] \right\} \\ \frac{\partial^3 K^{IV}}{\partial u \partial v^2} &= \frac{1}{8a N} \left\{ -\frac{\pi}{a} (x - u) \left[ \frac{c_0 c_1 + 1}{(c_0 + c_1)^2} + \frac{c_0 c_2 - 1}{(c_0 - c_2)^2} \right] \right\} \\ \frac{\partial^3 K^{IV}}{\partial v^3} &= \frac{1}{8a N} \left\{ \frac{s_1}{c_0 + c_1} - \frac{s_2}{c_0 - c_2} + \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 \left[ \frac{s_1}{(c_0 + c_1)^2} - \frac{s_2}{(c_0 - c_2)^2} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Da die höheren Singularitäten am schiefen Rand benötigt werden, wird zweckmäßig noch ein gedrehtes Koordinatensystem eingeführt, dessen Achsen jeweils parallel und senkrecht zu dem betrachteten Rand gerichtet sind. Für

die Koordinaten und die Differentialoperatoren gelten dann die im folgenden zusammengestellten Transformationsvorschriften.

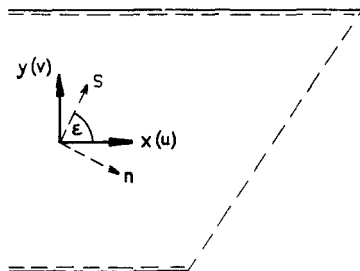


Abb. 7. Gedrehtes Koordinatensystem

Abkürzungen:  $\sin \varepsilon = \bar{s}$ ,  $\cos \varepsilon = \bar{c}$

$$s = \bar{s} x - \bar{c} y \quad (25)$$

$$n = \bar{c} x + \bar{s} y$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &\triangleq \bar{s} \frac{\partial}{\partial x} - \bar{c} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial s} &\triangleq \bar{c} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{s} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial n^2} &\triangleq \bar{s}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \bar{s} \bar{c} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \bar{c}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} &\triangleq \bar{c}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \bar{s} \bar{c} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \bar{s}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial n^3} &\triangleq \bar{s}^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3 \bar{s}^2 \bar{c} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3 \bar{s} \bar{c}^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \bar{c}^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ \frac{\partial^3}{\partial n \partial s^2} &\triangleq \bar{s} \bar{c}^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2 \bar{s}^2 \bar{c} - \bar{c}^3) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (\bar{s}^3 - 2 \bar{s} \bar{c}^2) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \bar{c} \bar{s}^2 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Für die Randgrößen am Rande  $n = \text{const}$  gilt

$$\left. \begin{aligned} m_n &= -N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \\ \bar{q}_n &= -N \left( \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial s^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Transformationsvorschriften (27) und (28) liefern auf (29) angewendet

$$\begin{aligned} m_n &= -N \left[ (\bar{s}^2 + \mu \bar{c}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \bar{s} \bar{c} (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (\bar{c}^2 + \mu \bar{s}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (30) \\ \bar{q}_n &= -N \left[ \left\langle \bar{s}^3 + (2 - \mu) \bar{s} \bar{c}^2 \right\rangle \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left\langle (2 - \mu) (2 \bar{s}^2 \bar{c} - \bar{c}^3) - 3 \bar{s}^2 \bar{c} \right\rangle \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle 3 \bar{s} \bar{c}^2 + (2 - \mu) (\bar{s}^3 - 2 \bar{s} \bar{c}^2) \right\rangle \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \left\langle \bar{c}^3 + (2 - \mu) \bar{c} \bar{s}^2 \right\rangle \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right]. \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \bar{s}^2 + \mu \bar{c}^2 & k_6 &= 3 \bar{s} \bar{c}^2 + (2 - \mu) (\bar{s}^3 - 2 \bar{s} \bar{c}^2) & a_4 &= 2 \bar{s} \bar{c} \\
 k_2 &= 2 \bar{s} \bar{c} (1 - \mu) & k_7 &= \bar{c}^3 + (2 - \mu) \bar{c} \bar{s}^2 & a_5 &= k_4 - k_6 \\
 k_3 &= \bar{c}^2 + \mu \bar{s}^2 & a_1 &= - (1 + \mu)/8 \pi & a_6 &= k_7 - k_5 \\
 k_4 &= \bar{s}^3 + (2 - \mu) \bar{s} \bar{c}^2 & a_2 &= - (1 - \mu)/8 a & a_7 &= - k_4 \\
 k_5 &= (2 - \mu) (2 \bar{s}^2 \bar{c} - \bar{c}^3) - 3 \bar{s}^2 \bar{c} & a_3 &= \bar{c}^2 - \bar{s}^2 & a_8 &= k_5 + k_7
 \end{aligned}$$

erhält man für die dem Biegemoment und der Randquerkraft zugeordneten Singularitäten:

$$\left. \begin{aligned}
 [m_n]^{IV} &= -N \left[ k_1 \frac{\partial^2 K^{IV}}{\partial u^2} - k_2 \frac{\partial^2 K^{IV}}{\partial u \partial v} + k_3 \frac{\partial^2 K^{IV}}{\partial v^2} \right], \\
 [\bar{q}_n]^{IV} &= -N \left[ k_4 \frac{\partial^3 K^{IV}}{\partial u^3} + k_5 \frac{\partial^3 K^{IV}}{\partial u^2 \partial v} + k_6 \frac{\partial^3 K^{IV}}{\partial u \partial v^2} - k_7 \frac{\partial^3 K^{IV}}{\partial v^3} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Setzt man in diese Beziehungen die Ausdrücke (23) und (24) ein, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned}
 [m_n]^{IV} &= - \left\{ a_1 \ln \left[ \frac{c_0 + c_1}{c_0 - c_2} \right] + a_2 (x - u) \left[ \frac{a_3 s_0 + a_4 s_1}{c_0 + c_1} - \frac{a_3 s_0 + a_4 s_2}{c_0 - c_2} \right] \right\}, \\
 [\bar{q}_n]^{IV} &= - \frac{1}{8a} \left\{ - \frac{a_6 s_1 + 2 a_7 s_0}{c_0 + c_1} + \frac{a_6 s_2 + 2 a_7 s_0}{c_0 - c_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\pi}{a} (x - u) \left[ \frac{a_5 (c_0 c_1 + 1) - a_8 s_0 s_1}{(c_0 + c_1)^2} + \frac{a_5 (c_0 c_2 - 1) + a_8 s_0 s_2}{(c_0 - c_2)^2} \right] \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Mit dem Singularteil (18) läßt sich damit die vollständige Randquerkraft-Einflußfläche in folgender Form angeben:

$$[\bar{q}_y] = [\bar{q}_y]^{IV} + \sum_{i=1}^{i_n} \{ A_i [m_n]_i^{IV} + A_{i+n} [\bar{q}_n]_i^{IV} \}. \quad (33)$$

Der Index  $i$  bei den Ansatzfunktionen bedeutet hierbei, daß für  $u, v$  die Koordinaten der Aufpunkte der Ansatzsingularitäten  $u_i, v_i$  zu setzen sind.

## 5. Methoden zur Erfüllung der Randbedingungen

### 5.1 Kollokation

Die Erfahrungen, die verschiedene Verfasser mit dieser Methode gemacht haben, sind sehr unterschiedlich. *Büscher* [17] gibt beispielsweise an, bei der Ermittlung von Einflußflächen für die Randmitte einer ringsum eingespannten schiefen Platte schon bei wenigen Kollokationspunkten ausreichende Genauigkeit erzielt zu haben. *Pucher* [8] stellt dagegen bei der Ermittlung des Drillmomenten-Einflußfeldes für die Feldmitte einer eingespannten quadratischen Platte fest, „daß trotz hoher Genauigkeit in der Rechnungsdurchführung zwischen den Punkten, in denen die Randbedingungen streng erfüllt sind, sowohl die Funktionswerte als auch die Neigung der Randtangente viel größere Abweichungen vom Sollbetrag zeigten, als zugelassen werden konnte“.



Um nun die Brauchbarkeit der Kollokationsmethode bei der vorliegenden Problemstellung zu untersuchen, werden die Ansätze (19), (20) und (33) mit dieser Methode behandelt. Die Randbedingungen lauten für den gelenkig gelagerten Rand

$$\left. \begin{aligned} w([\bar{q}_y]) &= 0, \\ m_y([\bar{q}_y]) &= -N \left\{ \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]}{\partial x^2} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} (34 \text{ a, b})$$

und für den freien Rand

$$m_n([\bar{q}_y]) = -N \left\{ \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]}{\partial s^2} \right\} = 0,$$

$$\bar{q}_n([\bar{q}_y]) = -N \left\{ \frac{\partial^3 [\bar{q}_y]}{\partial n^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 [\bar{q}_y]}{\partial n \partial s^2} \right\} = 0,$$

bzw. im  $x, y$ -System

$$\left. \begin{aligned} m_n([\bar{q}_y]) &= -N \left\{ k_1 \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]}{\partial x^2} - k_2 \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]}{\partial x \partial y} + k_3 \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]}{\partial y^2} \right\} = 0, \\ \bar{q}_n([\bar{q}_y]) &= -N \left\{ k_4 \frac{\partial^3 [\bar{q}_y]}{\partial x^3} + k_5 \frac{\partial^3 [\bar{q}_y]}{\partial x^2 \partial y} + k_6 \frac{\partial^3 [\bar{q}_y]}{\partial x \partial y^2} - k_7 \frac{\partial^3 [\bar{q}_y]}{\partial y^3} \right\} = 0. \end{aligned} \right\} (34 \text{ c, d})$$

Für die Ansätze (19), (20) und (33) müssen noch die in (34) vorkommenden Ableitungen gebildet werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]^{II}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4\pi} \{ 6y H_2 - 8y^3 H_3 + 24(x-u)^2 y (2y^2 H_4 - H_3) + \\ &\quad + (2-\mu) [6y H_2 - 48(x-u)^2 y H_3 + 48(x-u)^4 y H_4] \} \\ \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]^{II}}{\partial y^2} &= -\frac{1}{4\pi} \{ 30y H_2 - 80y^3 H_3 + 48y^5 H_4 + (2-\mu) [-24(x-u)^2 y H_3 + \\ &\quad + 48(x-u)^2 y^3 H_4 + 6y H_2 - 8y^3 H_3] \} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]^{II}}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{4\pi} \{ 24(x-u) y^2 (2y^2 (H_4 - H_3) + 6(x-u) (H_2 - 4y^2 H_3) + \\ &\quad + (2-\mu) [6(x-u) (H_2 - 4y^2 H_3) - 8(x-u)^3 (H_3 - 6y^2 H_4)] \} \end{aligned}$$

In diesen Formeln bedeutet die Abkürzung

$$H_i = \frac{1}{b_i} + \frac{1}{c_i} = \frac{1}{(x-u_i)^2 + (y-v_i)^2} + \frac{1}{(x-u_i)^2 + (y+v_i)^2}.$$

$$\frac{\partial^3 [\bar{q}_y]^{II}}{\partial x^3} = -\frac{1}{4\pi} (x-u) \{ -72 y H_3 + 144 y^3 H_4 + 144 (x-u)^2 y H_4 - \\ - 384 (x-u)^2 y^3 H_5 + (2-\mu) [-120 y H_3 + \\ + 480 (x-u)^2 y H_4 - 384 (x-u)^4 y H_5] \} \quad (36a)$$

$$\frac{\partial^3 [\bar{q}_y]^{II}}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{1}{4\pi} \{ 6 H_2 - 48 y^2 H_3 + 48 y^4 H_4 + (x-u)^2 [-24 H_3 + 288 y^2 H_4 - \\ - 384 y^4 H_5] + (2-\mu) [6 H_2 - 24 y^2 H_3 + 48 (x-u)^2 (-H_3 + \\ + 6 y^2 H_4) + 48 (x-u)^4 (H_4 - 8 y^2 H_5)] \} \quad (36b)$$

$$\frac{\partial^3 [\bar{q}_y]^{II}}{\partial x \partial y^2} = -\frac{24}{4\pi} (x-u) \{ -5 y H_3 + 20 y^3 H_4 - 16 y^5 H_5 + \\ + (2-\mu) [6 (x-u)^2 y H_4 - 3 y H_3 - 16 (x-u)^2 y^3 H_5 + \\ + 6 y^3 H_4] \} \quad (36c)$$

$$\frac{\partial^3 [\bar{q}_y]^{II}}{\partial y^3} = -\frac{1}{4\pi} \{ 30 H_2 - 360 y^2 H_3 + 720 y^4 H_4 - 384 y^6 H_5 + \\ + (2-\mu) [24 (x-u)^2 (-H_3 + 12 y^2 H_4 - 16 y^4 H_5) + 6 H_2 + \\ + 48 y^2 (-H_3 + y^4 H_4)] \} \quad (36d)$$

Es folgen die entsprechenden Ableitungen für das  $i$ -te Reihenglied des Regulaarteils von (20).

$$\frac{\partial^2 K^{II}}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi N} \left\{ \ln b_i - \ln c_i + 2 (x-u_i)^2 \left[ \frac{1}{b_i} - \frac{1}{c_i} \right] \right\} \quad (37a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 K^{II}}{\partial y^2} &= \frac{1}{8\pi N} \left\{ \ln b_i - \ln c_i + 2 \left[ \frac{(y-v_i)^2}{b_i} - \frac{(y+v_i)^2}{c_i} \right] \right\} \\ \frac{\partial^2 K^{II}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\pi N} (x-u_i) \left[ \frac{y-v_i}{b_i} - \frac{y+v_i}{c_i} \right] \end{aligned} \right\} \quad (37b, c)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 K^{II}}{\partial x^3} &= \frac{1}{4\pi N} \left\{ 3 (x-u_i) \left[ \frac{1}{b_i} - \frac{1}{c_i} \right] - 2 (x-u_i)^3 \left[ \frac{1}{b_i^2} - \frac{1}{c_i^2} \right] \right\} \\ \frac{\partial^3 K^{II}}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{1}{4\pi N} \left\{ \left[ \frac{y-v_i}{b_i} - \frac{y+v_i}{c_i} \right] - 2 (x-u_i)^2 \left[ \frac{y-v_i}{b_i^2} - \frac{y+v_i}{c_i^2} \right] \right\} \\ \frac{\partial^3 K^{II}}{\partial x \partial y^2} &= \frac{1}{4\pi N} (x-u_i) \left\{ \frac{1}{b_i} - \frac{1}{c_i} - 2 \left[ \frac{(y-v_i)^2}{b_i^2} + \frac{(y+v_i)^2}{c_i^2} \right] \right\} \\ \frac{\partial^3 K^{II}}{\partial y^3} &= \frac{1}{4\pi N} \left\{ 3 \left[ \frac{y-v_i}{b_i} - \frac{y+v_i}{c_i} \right] - 2 \left[ \frac{(y-v_i)^3}{b_i^2} - \frac{(y+v_i)^3}{c_i^2} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Mit den Ausdrücken (35) bis (38) können nun die Gleichungen zur Erfüllung der Randbedingungen (34) für den Ansatz (20) angeschrieben werden, was hier — der Länge der Ausdrücke wegen — nicht wiedergegeben werden soll.

Man erhält ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der  $i_n$  unbekannten Einzellast-Singularitäten  $P_i$ . Da für jeden Kollokationspunkt zwei Randbedingungen zu erfüllen sind, muß die Anzahl der Ansatz-Singularitäten doppelt so groß wie die Zahl der Kollokationspunkte sein.

Beim Ansatz (19) ist die singuläre Lösung des Plattenstreifens verwendet worden, deren Ableitungen im folgenden angegeben werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]^{IV}}{\partial x^2} = \frac{\pi^2}{8 a^3} \left\{ (3 - \mu) [c_0 (s_1 c_{01}^{-2} - s_2 c_{02}^{-2}) + 2 s_0^2 (s_2 c_{02}^{-3} - s_1 c_{01}^{-3})] \right. \\ \left. - (1 - \mu) \left[ \left\langle 2 c_0 + \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 \right\rangle (s_2 c_{02}^{-2} - s_1 c_{01}^{-2}) + \right. \right. \\ \left. + 4 \left\langle s_0 + \frac{\pi}{a} (x - u) c_0 \right\rangle (-s_2 s_0 c_{02}^{-3} + s_1 s_0 c_{01}^{-3}) + 2 \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 \right. \\ \left. \left. (-s_2 c_0 c_{02}^{-3} + 3 s_2 s_0^2 c_{02}^{-4} + s_1 c_0 c_{01}^{-3} - 3 s_1 s_0^2 c_{01}^{-4}) \right] \right\} \quad (39a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]^{IV}}{\partial y^2} = \frac{\pi^2}{8 a^3} \left\{ (3 - \mu) [-s_2 c_{02}^{-1} - 3 s_2 c_2 c_{02}^{-2} + 2 s_2^3 c_{02}^{-3} + s_1 c_{01}^{-1} - 3 s_1 c_1 c_{01}^{-2} - \right. \\ \left. - 2 s_1^3 c_{01}^{-3}] - (1 - \mu) \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 [-s_2 c_{02}^{-2} - 6 s_2 c_2 c_{02}^{-3} + 6 s_2^3 c_{02}^{-4} + \right. \\ \left. + s_1 c_{01}^{-2} - 6 s_1 c_1 c_{01}^{-3} - 6 s_1^3 c_{01}^{-4}] \right\} \quad (39b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [\bar{q}_y]^{IV}}{\partial x \partial y} = \frac{\pi^2}{8 a^3} \left\{ (3 - \mu) s_0 [-c_2 c_{02}^{-2} + 2 s_2^2 c_{02}^{-3} + c_1 c_{01}^{-2} + 2 s_1^2 c_{01}^{-3}] - (1 - \mu) \right. \\ \left[ \left\langle s_0 + \frac{\pi}{a} (x - u) c_0 \right\rangle (c_2 c_{02}^{-2} - 2 s_2^2 c_{02}^{-3} - c_1 c_{01}^{-2} - 2 s_1^2 c_{01}^{-3}) + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{a} (x - u) s_0^2 (-2 c_2 c_{02}^{-3} + 6 s_2^2 c_{02}^{-4} + 2 c_1 c_{01}^{-3} + 6 s_1^2 c_{01}^{-4}) \right] \right\} \quad (39c) \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken sind folgende Abkürzungen verwendet:

$$c_{01} = c_0 + c_1, \quad c_{02} = c_0 - c_2.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 [\bar{q}_y]^{IV}}{\partial x^3} = \frac{\pi^3}{8 a^4} \left\{ (3 - \mu) [s_0 (s_1 c_{01}^{-2} - s_2 c_{02}^{-2}) + 6 s_0 c_0 (s_2 c_{02}^{-3} - s_1 c_{01}^{-3}) + \right. \\ \left. + 6 s_0^3 (s_1 c_{01}^{-4} - s_2 c_{02}^{-4})] - (1 - \mu) \left[ \left\langle 3 s_0 + \frac{\pi}{a} (x - u) c_0 \right\rangle (s_2 c_{02}^{-2} - \right. \right. \\ \left. - s_1 c_{01}^{-2}) + 6 \left\langle 2 c_0 + \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 \right\rangle (-s_2 s_0 c_{02}^{-3} + s_1 s_0 c_{01}^{-3}) + \right. \\ \left. + 6 \left\langle s_0 + \frac{\pi}{a} (x - u) c_0 \right\rangle \langle c_0 (-s_2 c_{02}^{-3} + s_1 c_{01}^{-3}) + 3 s_0^2 (s_2 c_{02}^{-4} - \right. \\ \left. - s_1 c_{01}^{-4}) \rangle + 2 \frac{\pi}{a} (x - u) s_0^2 \langle -s_2 c_{02}^{-3} + s_1 c_{01}^{-3} + 9 c_0 (s_2 c_{02}^{-4} - \right. \\ \left. - s_1 c_{01}^{-4}) + 24 s_0^2 (-s_2 c_{02}^{-5} + s_1 c_{01}^{-5}) \rangle \right] \right\} \quad (40a) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 [\bar{q}_y]^{IV}}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\pi^3}{8 a^4} \left\{ (3 - \mu) [s_0 (c_1 c_{01}^{-2} + 2 s_1^2 c_{01}^{-3} - c_2 c_{02}^{-2} + 2 s_2^2 c_{02}^{-3}) + 2 s_0^2 (c_2 c_{02}^{-3} - 3 s_2^2 c_{02}^{-4} - c_1 c_{01}^{-3} - 3 s_1^2 c_{01}^{-4})] - (1 - \mu) \left[ \left\langle 2 c_0 + \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 \right\rangle (c_2 c_{02}^{-2} - 2 s_2^2 c_{02}^{-3} - c_1 c_{01}^{-2} - 2 s_1^2 c_{01}^{-3}) + s_0 \left\langle 4 s_0 + 6 \frac{\pi}{a} (x - u) c_0 \right\rangle (-c_2 c_{02}^{-3} + 3 s_2^2 c_{02}^{-4} + c_1 c_{01}^{-3} + 3 s_1^2 c_{01}^{-4}) + 6 \frac{\pi}{a} (x - u) c_0^3 (c_2 c_{02}^{-4} - 4 s_2^2 c_{02}^{-5} - c_1 c_{01}^{-4} - 4 s_1^2 c_{01}^{-5}) \right] \right\} \quad (40b)$$

$$\frac{\partial^3 [\bar{q}_y]^{IV}}{\partial x \partial y^2} = \frac{\pi^3}{8 a^4} \left\{ (3 - \mu) s_0 [s_2 c_{02}^{-2} + 6 s_2 c_2 c_{02}^{-3} - 6 s_2^3 c_{02}^{-4} - s_1 c_{01}^{-2} + 6 s_1 c_1 c_{01}^{-3} + 6 s_1^3 c_{01}^{-4}] - (1 - \mu) \left[ \left\langle s_0 + \frac{\pi}{a} (x - u) c_0 \right\rangle (-s_2 c_{02}^{-2} - 6 s_2 c_2 c_{02}^{-3} + 6 s_2^3 c_{02}^{-4} + s_1 c_{01}^{-2} - 6 s_1 c_1 c_{01}^{-3} - 6 s_1^3 c_{01}^{-4}) + 2 \frac{\pi}{a} (x - u) s_0^2 (s_2 c_{02}^{-3} + 9 s_2 c_2 c_{02}^{-4} - 12 s_2^3 c_{02}^{-5} - s_1 c_{01}^{-3} + 9 s_1 c_1 c_{01}^{-4} + 12 s_1^3 c_{01}^{-5}) \right] \right\} \quad (40c)$$

$$\frac{\partial^3 [\bar{q}_y]^{IV}}{\partial y^3} = \frac{\pi^3}{8 a^4} \left\{ (3 - \mu) [-c_2 c_{02}^{-1} + (4 s_2^2 - 3 c_2^2) c_{02}^{-2} + 12 s_2^2 c_2 c_{02}^{-3} - 6 s_2^4 c_{02}^{-4} + c_1 c_{01}^{-1} + (4 s_1^2 - 3 c_1^2) c_{01}^{-2} - 12 s_1^2 c_1 c_{01}^{-3} - 6 s_1^4 c_{01}^{-4}] - (1 - \mu) \frac{\pi}{a} (x - u) s_0 [-c_2 c_{02}^{-2} - (6 c_2^2 - 8 s_2^2) c_{02}^{-3} + 36 s_2^2 c_2 c_{02}^{-4} - 24 s_2^4 c_{02}^{-5} + c_1 c_{01}^{-2} - (6 c_1^2 - 8 s_1^2) c_{01}^{-3} - 36 s_1^2 c_1 c_{01}^{-4} - 24 s_1^4 c_{01}^{-5}] \right\} \quad (40d)$$

Es folgen die entsprechenden Ableitungen für das  $i$ -te Reihenglied des Ansatzes von (19).

$$R_i =$$

$$\left\{ A_i \sinh \frac{i \pi}{a} x + B_i \cosh \frac{i \pi}{a} x + C_i x \sinh \frac{i \pi}{a} x + D_i x \cosh \frac{i \pi}{a} x \right\} \sin \frac{i \pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} = \left( \frac{i \pi}{a} \right)^2 \left\{ \left( A_i + C_i x + 2 \frac{a}{i \pi} D_i \right) \sinh \frac{i \pi}{a} x + \left( B_i + D_i x + 2 \frac{a}{i \pi} C_i \right) \cosh \frac{i \pi}{a} x \right\} \sin \frac{i \pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} = -$$

$$\left( \frac{i \pi}{a} \right)^2 \left\{ \left( A_i + C_i x \right) \sinh \frac{i \pi}{a} x + \left( B_i + D_i x \right) \cosh \frac{i \pi}{a} x \right\} \sin \frac{i \pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} = \left( \frac{i \pi}{a} \right)^2 \left\{ \left( A_i + C_i x + \frac{a}{i \pi} D_i \right) \cosh \frac{i \pi}{a} x + \left( B_i + D_i x + \frac{a}{i \pi} C_i \right) \sinh \frac{i \pi}{a} x \right\} \cos \frac{i \pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right) \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^3 R_i}{\partial x^3} &= \left( \frac{i\pi}{a} \right)^3 \left\{ \left( A_i + C_i x + 3 \frac{a}{i\pi} D_i \right) \cosh \frac{i\pi}{a} x + \right. \\
 &\quad \left. + \left( B_i + D_i x + 3 \frac{a}{i\pi} C_i \right) \sinh \frac{i\pi}{a} x \right\} \sin \frac{i\pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right) \\
 \frac{\partial^3 R_i}{\partial x^2 \partial y} &= \left( \frac{i\pi}{a} \right)^3 \left\{ \left( A_i + C_i x + 2 \frac{a}{i\pi} D_i \right) \sinh \frac{i\pi}{a} x + \right. \\
 &\quad \left. + \left( B_i + D_i x + 2 \frac{a}{i\pi} C_i \right) \cosh \frac{i\pi}{a} x \right\} \cos \frac{i\pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right) \\
 \frac{\partial^3 R_i}{\partial x \partial y^2} &= - \left( \frac{i\pi}{a} \right)^3 \left\{ \left( A_i + C_i x + \frac{a}{i\pi} D_i \right) \cosh \frac{i\pi}{a} x + \right. \\
 &\quad \left. + \left( B_i + D_i x + \frac{a}{i\pi} C_i \right) \sinh \frac{i\pi}{a} x \right\} \sin \frac{i\pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right) \\
 \frac{\partial^3 R_i}{\partial y^3} &= - \left( \frac{i\pi}{a} \right)^3 \left\{ \left( A_i + C_i x \right) \sinh \frac{i\pi}{a} x + \right. \\
 &\quad \left. + \left( B_i + D_i x \right) \cosh \frac{i\pi}{a} x \right\} \cos \frac{i\pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Mit Hilfe der Ausdrücke (39) bis (42) lassen sich nun die Randbedingungen (34) für den Ansatz (19) in den Kollokationspunkten anschreiben. Man erhält wieder ein lineares Gleichungssystem für die  $4 i_n$  unbekannten Ansatzkonstanten. Da pro Kollokationspunkt 2 Gleichungen zur Verfügung stehen und pro Reihenglied des Regularteils 4 Unbekannte auftreten, muß die Anzahl der Kollokationspunkte  $2 i_n$  betragen. Bei einem Teil der Beispielrechnungen (siehe 7.12) sind mit Hilfe dieses Ansatzes auch die Symmetrieeigenschaften des Systems ausgenutzt worden. Dabei wird der Singularteil in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil aufgespalten, indem einmal im eigentlichen Aufpunkt  $(u, v)$  und im zugehörigen Symmetriepunkt  $(-u, -v)$  je eine Singularität von halber Größe und gleichen Vorzeichens und im anderen Fall je eine Singularität von halber Größe aber verschiedenen Vorzeichens angebracht wird (vgl. Abb. 8). Die Aufteilung des Regularteils kann einfach

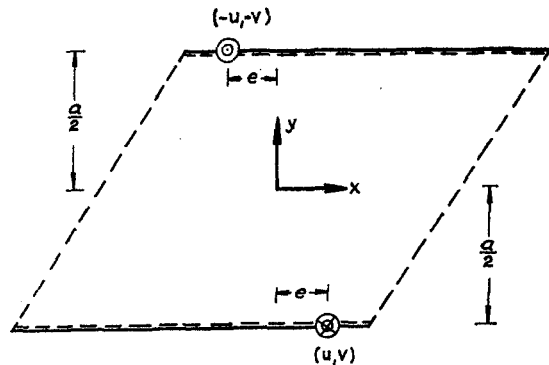


Abb. 8. Antisymmetrischer Singularteil

auf Grund der Symmetrieeigenschaften der Funktionen erfolgen, was hier nicht im einzelnen dargestellt werden soll. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß man sich bei der Erfüllung der Randbedingungen auf einen der freien Ränder beschränken kann. Dafür erhält man 2 Gleichungssysteme von halber Größenordnung.

Im Ansatz (33), auf den ebenfalls die Kollokationsmethode angewandt wurde, ist der Singularteil mit dem von Ansatz (19) identisch. Der Regularteil besteht aus den höheren Singularitäten, deren Ableitungen nachfolgend angegeben werden. Dabei werden die gleichen Abkürzungen wie bei den Ableitungen des Singularteils benutzt. Zu beachten ist nur, daß in allen Ausdrücken  $u$  und  $v$  durch  $u_i$  und  $v_i$  zu ersetzen sind.

$$\frac{\partial^2 [m_n]_i^{\text{IV}}}{\partial x^2} = - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \left\{ a_1 [-c_1 c_{01}^{-1} - c_2 c_{02}^{-1} - s_0^2 (c_{01}^{-2} - c_{02}^{-2})] + 2 \frac{a}{\pi} a_2 [\langle a_3 (c_0 c_1 + 1) - a_4 s_0 s_1 \rangle c_{01}^{-2} + \langle a_3 (c_0 c_2 - 1) + a_4 s_0 s_2 \rangle c_{02}^{-2}] + a_2 (x - u_i) [\langle a_3 s_0 c_1 - a_4 c_0 s_1 \rangle c_{01}^{-1} + \langle a_3 s_0 c_2 + a_4 c_0 s_2 \rangle c_{02}^{-1} - 2 s_0 \langle a_3 (c_0 c_1 + 1) - a_4 s_0 s_1 \rangle c_{01}^{-3} - 2 s_0 \langle a_3 (c_0 c_2 - 1) + a_4 s_0 s_2 \rangle c_{02}^{-3}] \right\} \quad (43a)$$

$$\frac{\partial^2 [m_n]_i^{\text{IV}}}{\partial y^2} = - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \left\{ a_1 [-c_1 c_{01}^{-1} - c_2 c_{02}^{-1} - s_1^2 c_{01}^{-2} + s_2^2 c_{02}^{-2}] + a_2 (x - u_i) [a_4 (-s_1 c_{01}^{-1} + s_2 c_{02}^{-1} + 3 s_1 c_1 c_{01}^{-2} + 3 s_2 c_2 c_{02}^{-2}) + 2 s_1^2 c_{01}^{-3} (a_3 s_0 + a_4 s_1) - 2 s_2^2 c_{02}^{-3} (a_3 s_0 + a_4 s_2) + a_3 s_0 (c_1 c_{01}^{-2} + c_2 c_{02}^{-2})] \right\} \quad (43b)$$

$$\frac{\partial^2 [m_n]_i^{\text{IV}}}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \left\{ a_1 s_0 (s_1 c_{01}^{-2} + s_2 c_{02}^{-2}) + \frac{a}{\pi} a_2 [a_4 (c_1 c_{01}^{-1} - c_2 c_{02}^{-1}) + s_1 c_{01}^{-2} (a_3 s_0 + a_4 s_1) + s_2 c_{02}^{-2} (a_3 s_0 + a_4 s_2)] + a_2 (x - u_i) [-c_{01}^{-2} (a_3 c_0 s_1 + a_4 s_0 c_1) - c_{02}^{-2} (a_3 c_0 s_2 - a_4 s_0 c_2) + 2 s_1 c_{01}^{-3} \langle a_3 (c_0 c_1 + 1) - a_4 s_0 s_1 \rangle - 2 s_2 c_{02}^{-3} \langle a_3 (c_0 c_2 - 1) + a_4 s_0 s_2 \rangle] \right\} \quad (43c)$$

$$\frac{\partial^3 [m_n]_i^{\text{IV}}}{\partial x^3} = - \left( \frac{\pi}{a} \right)^3 \left\{ a_1 s_0 [c_1 c_{01}^{-2} + c_2 c_{02}^{-2} - 2 c_{01}^{-3} (c_0 c_1 + 1) - 2 c_{02}^{-3} (c_0 c_2 - 1)] + 3 \frac{a}{\pi} a_2 [c_{01}^{-2} (a_3 s_0 c_1 - a_4 c_0 s_1) + c_{02}^{-2} (a_3 s_0 c_2 + a_4 c_0 s_2) - 2 s_0 c_{01}^{-3} \langle a_3 (c_0 c_1 + 1) - a_4 s_0 s_1 \rangle - 2 s_0 c_{02}^{-3} \langle a_3 (c_0 c_2 - 1) + a_4 s_0 s_2 \rangle] + a_2 (x - u_i) [c_{01}^{-2} \langle a_3 (c_0 c_1 - 2) - a_4 s_0 s_1 \rangle + c_{02}^{-2} \langle a_3 (c_0 c_2 + 2) + a_4 s_0 s_2 \rangle - 6 s_0 c_{01}^{-3} (a_3 s_0 c_1 - a_4 c_0 s_1) - 6 s_0 c_{02}^{-3} (a_3 s_0 c_2 + a_4 c_0 s_2) + 6 s_0^2 c_{01}^{-4} \langle a_3 (c_0 c_1 + 1) - a_4 s_0 s_1 \rangle + 6 s_0^2 c_{02}^{-4} \langle a_3 (c_0 c_2 - 1) + a_4 s_0 s_2 \rangle] \right\} \quad (44a)$$

$$\frac{\partial^3 [m_n]_i^{IV}}{\partial x^2 \partial y} = - \left( \frac{\pi}{a} \right)^3 \left\{ a_1 c_0 (s_1 c_{01}^{-2} + s_2 c_{02}^{-2}) - 2 a_1 s_0^2 (s_1 c_{01}^{-3} + s_2 c_{02}^{-3}) + \right. \\ \left. + 2 \frac{a}{\pi} a_2 [-c_{01}^{-2} (a_3 c_0 s_1 + a_4 s_0 c_1) - c_{02}^{-2} (a_3 c_0 s_2 - a_4 s_0 c_2) + \right. \\ \left. + 2 s_1 c_{01}^{-3} \langle a_3 (c_0 c_1 + 1) - a_4 s_0 s_1 \rangle - 2 s_2 c_{02}^{-3} \langle a_3 (c_0 c_2 - 1) + \right. \\ \left. + a_4 s_0 s_2 \rangle] + a_2 (x - u_i) [c_{01}^{-2} (a_3 s_0 s_1 - a_4 c_0 c_1) + c_{02}^{-2} (a_3 s_0 s_2 + \right. \\ \left. + a_4 c_0 c_2) + 2 a_4 \langle c_{01}^{-3} (s_0^2 c_1 - c_0 s_1^2) - c_{02}^{-3} (s_0^2 c_2 + c_0 s_2^2) \rangle - \right. \\ \left. - 6 s_0 c_1 c_{01}^{-4} \langle a_3 (c_0 c_1 + 1) - a_4 s_0 s_1 \rangle + 6 s_0 s_2 c_{02}^{-4} \langle a_3 (c_0 c_2 - 1) + \right. \\ \left. + a_4 s_0 s_2 \rangle] \right\} \quad (44b)$$

$$\frac{\partial^3 [m_n]_i^{IV}}{\partial x \partial y^2} = - \left( \frac{\pi}{a} \right)^3 \left\{ a_1 s_0 (c_1 c_{01}^{-2} + c_2 c_{02}^{-2} + 2 s_1^2 c_{01}^{-3} - 2 s_2^2 c_{02}^{-3}) - \right. \\ \left. - \frac{a}{\pi} a_2 [a_4 (-s_1 c_{01}^{-1} + s_2 c_{02}^{-1}) + c_{01}^{-2} (3 a_4 s_1 c_1 + a_3 s_0 c_1) + c_{02}^{-2} (3 a_4 s_2 c_2 + \right. \\ \left. + a_3 s_0 c_2) + 2 s_1^2 c_{01}^{-3} (a_3 s_0 + a_4 s_1) - 2 s_2^2 c_{02}^{-3} (a_3 s_0 + a_4 s_2)] + a_2 (x - \right. \\ \left. - u_i) [c_{01}^{-2} \langle a_4 s_0 s_1 - a_3 (c_0 c_1 - 2) \rangle - c_{02}^{-2} \langle a_4 s_0 s_2 + a_3 (c_0 c_2 + 2) \rangle - \right. \\ \left. - 6 s_1 c_{01}^{-3} (a_3 c_0 s_1 + a_4 s_0 c_1) + 6 s_2 c_{02}^{-3} (a_3 c_0 s_2 - a_4 s_0 c_2) + 6 s_1^2 c_{01}^{-4} \right. \\ \left. \langle a_3 (c_0 c_1 + 1) - a_4 s_0 s_1 \rangle + 6 s_2^2 c_{02}^{-4} \langle a_3 (c_0 c_2 - 1) + a_4 s_0 s_2 \rangle] \right\} \quad (44c)$$

$$\frac{\partial^3 [m_n]_i^{IV}}{\partial y^3} = - \left( \frac{\pi}{a} \right)^3 \left\{ a_1 (s_1 c_{01}^{-1} + s_2 c_{02}^{-1} - 3 s_1 c_1 c_{01}^{-2} + 3 s_2 c_2 c_{02}^{-2} - 2 s_1^3 c_{01}^{-3} - \right. \\ \left. - 2 s_2^3 c_{02}^{-3}) + a_2 (x - u_i) [a_4 \langle -c_1 c_{01}^{-1} + c_2 c_{02}^{-1} + c_{01}^{-2} (3 c_1^2 - 4 s_1^2) + \right. \\ \left. + c_{02}^{-2} (3 c_2^2 - 4 s_2^2) + 6 (s_1^2 c_1 c_{01}^{-3} - s_2^2 c_2 c_{02}^{-3}) \rangle + a_3 s_0 (-s_1 c_{01}^{-2} - \right. \\ \left. - s_2 c_{02}^{-2}) + 6 s_1 c_1 c_{01}^{-3} (a_3 s_0 + a_4 s_1) - 6 s_2 c_2 c_{02}^{-3} (a_3 s_0 + a_4 s_2) + \right. \\ \left. + 6 s_1^3 c_{01}^{-4} (a_3 s_0 + a_4 s_1) + 6 s_2^3 c_{02}^{-4} (a_3 s_0 + a_4 s_2) \right] \right\} \quad (44d)$$

Mit Einführung folgender Abkürzungen für die Konstanten (vgl. auch S. 94)

$$a_9 = a_6 - a_8, \quad a_{11} = a_6 - 2 a_8, \\ a_{12} = 2 (a_5 - a_7), \quad a_{10} = a_5 + 2 a_7$$

erhält man für die Ableitungen der zur Randquerkraft gehörigen Singularität folgende Ausdrücke:

$$\frac{\partial^2 [\bar{q}_n]_i^{IV}}{\partial x^2} = - \frac{\pi^2}{8 a^3} \left\{ c_{01}^{-2} (a_{11} c_0 s_1 + a_{12} s_0 c_1) - c_{02}^{-2} (a_{11} c_0 s_2 - a_{12} s_0 c_2) - \right. \\ \left. - 2 s_0 \langle a_{11} s_0 s_1 + a_{12} (c_0 c_1 + 1) \rangle c_{01}^{-3} + 2 s_0 \langle a_{11} s_0 s_2 - a_{12} (c_0 c_2 - \right. \\ \left. - 1) \rangle c_{02}^{-3} + \frac{\pi}{a} (x - u_i) [c_{01}^{-2} \langle a_5 (c_0 c_1 - 2) - a_8 s_0 s_1 \rangle + c_{02}^{-2} \langle a_5 (c_0 c_2 + \right. \\ \left. + 2) + a_8 s_0 s_2 \rangle - 6 s_0 \langle c_{01}^{-3} (a_5 s_0 c_1 - a_8 c_0 s_1) + c_{02}^{-3} (a_5 s_0 c_2 + a_8 c_0 s_2) \rangle + \right. \\ \left. + 6 s_0^2 c_{01}^{-4} \langle a_5 (c_0 c_1 + 1) - a_8 s_0 s_1 \rangle + 6 s_0^2 c_{02}^{-4} \langle a_5 (c_0 c_2 - 1) + \right. \\ \left. + a_8 s_0 s_2 \rangle] \right\}, \quad (45a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [\bar{q}_n]_i^{\text{IV}}}{\partial y^2} = & -\frac{\pi^2}{8a^3} \left\{ c_{01}^{-2} (a_6 c_0 s_1 - 2 a_7 s_0 c_1) - c_{02}^{-2} (a_6 c_0 s_2 + 2 a_7 s_0 c_2) - \right. \\ & - 2 s_1 c_{01}^{-3} \langle a_6 (c_0 c_1 + 1) + 2 a_7 s_0 s_1 \rangle - 2 s_2 c_{02}^{-3} \langle a_6 (c_0 c_2 - 1) - \\ & - 2 a_7 s_0 s_2 \rangle + \frac{\pi}{a} (x - u_i) [c_{01}^{-2} \langle a_8 s_0 s_1 - a_5 (c_0 c_1 - 2) \rangle - c_{02}^{-2} \langle a_8 s_0 s_2 + \\ & + a_5 (c_0 c_2 + 2) \rangle - 6 \langle s_1 c_{01}^{-3} (a_5 c_0 s_1 + a_8 s_0 c_1) + s_2 c_{02}^{-3} (a_5 c_0 s_2 - \\ & - a_8 s_0 c_2) \rangle + 6 s_1^2 c_{01}^{-4} \langle a_5 (c_0 c_1 + 1) - a_8 s_0 s_1 \rangle + 6 s_2^2 c_{02}^{-4} \langle a_5 (c_0 c_2 - \\ & - 1) + a_8 s_0 s_2 \rangle] \left. \right\}, \quad (45b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [\bar{q}_n]_i^{\text{IV}}}{\partial x \partial y} = & -\frac{\pi^2}{8a^3} \left\{ (a_9 s_0 c_1 - a_{10} c_0 s_1) c_{01}^{-2} - (a_{10} c_0 s_2 + a_9 s_0 c_2) c_{02}^{-2} + \right. \\ & + 2 s_1 c_{01}^{-3} \langle a_9 s_0 s_1 + 2 a_7 s_0^2 + a_5 (c_0 c_1 + 1) \rangle + 2 s_2 c_{02}^{-3} \langle a_9 s_0 s_2 + \\ & + 2 a_7 s_0^2 - a_5 (c_0 c_2 - 1) \rangle + \frac{\pi}{a} (x - u_i) [c_{01}^{-2} \langle a_5 s_0 s_1 - a_8 c_0 c_1 \rangle + \\ & + c_{02}^{-2} \langle a_5 s_0 s_2 + a_8 c_0 c_2 \rangle + 2 a_8 \langle c_{01}^{-3} (s_0^2 c_1 - c_0 s_1^2) - c_{02}^{-3} (s_0^2 c_2 + c_0 s_2^2) \rangle - \\ & - 6 s_0 s_1 c_{01}^{-4} \langle a_5 (c_0 c_1 + 1) - a_8 s_0 s_1 \rangle + 6 s_0 s_2 c_{02}^{-4} \langle a_5 (c_0 c_2 - 1) + \\ & + a_8 s_0 s_2 \rangle] \left. \right\}, \quad (45c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 [\bar{q}_n]_i^{\text{IV}}}{\partial x^3} = & -\frac{\pi^3}{8a^4} \left\{ c_{01}^{-2} \langle a_{11} s_0 s_1 + a_{12} (c_0 c_1 - 2) \rangle - c_{02}^{-2} \langle a_{11} s_0 s_2 - a_{12} (c_0 c_2 + 2) \rangle - \right. \\ & - 6 s_0 \langle c_{01}^{-3} (a_{11} c_0 s_1 + a_{12} s_0 c_1) - c_{02}^{-3} (a_{11} c_0 s_2 - a_{12} s_0 c_2) \rangle + 6 s_0^2 c_{01}^{-4} \\ & \langle a_{11} s_0 s_1 + a_{12} (c_0 c_1 + 1) \rangle - 6 s_0^2 c_{02}^{-4} \langle a_{11} s_0 s_2 - a_{12} (c_0 c_2 - 1) \rangle + \\ & + \frac{\pi}{a} (x - u_i) [c_{01}^{-2} \langle a_5 s_0 c_1 - a_8 c_0 s_1 \rangle + c_{02}^{-2} \langle a_5 s_0 c_2 + a_8 c_0 s_2 \rangle + \\ & + 2 c_{01}^{-3} \langle 7 s_0 \langle a_8 s_0 s_1 - a_5 c_0 c_1 \rangle + 3 a_8 s_1 + 8 a_5 s_0 \rangle - 2 c_{02}^{-3} \langle 7 s_0 \langle a_8 s_0 s_2 + \\ & + a_5 c_0 c_2 \rangle + 3 a_8 s_2 + 8 a_5 s_0 \rangle + 36 s_0^2 \langle c_{01}^{-4} (a_5 s_0 c_1 - a_8 c_0 s_1) + \\ & + c_{02}^{-4} (a_5 s_0 c_2 + a_8 c_0 s_2) \rangle - 24 s_0^3 c_{01}^{-5} \langle a_5 (c_0 c_1 + 1) - a_8 s_0 s_1 \rangle - \\ & - 24 s_0^3 c_{02}^{-5} \langle a_5 (c_0 c_2 - 1) + a_8 s_0 s_2 \rangle] \left. \right\}, \quad (46a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 [\bar{q}_n]_i^{\text{IV}}}{\partial x^2 \partial y} = & -\frac{\pi^3}{8a^4} \left\{ c_{01}^{-2} (a_{11} c_0 c_1 + a_{12} s_0 s_1) - c_{02}^{-2} (a_{11} c_0 c_2 - a_{12} s_0 s_2) + \right. \\ & + 2 a_{11} \langle c_{01}^{-3} (c_0 s_1^2 - s_0^2 c_1) + c_{02}^{-3} (c_0 s_2^2 + s_0^2 c_2) \rangle - 6 s_0 s_1 c_{01}^{-4} \\ & \langle a_{11} s_0 s_1 + a_{12} (c_0 c_1 + 1) \rangle - 6 s_0 s_2 c_{02}^{-4} \langle a_{11} s_0 s_2 + a_{12} (c_0 c_2 - 1) \rangle + \\ & + \frac{\pi}{a} (x - u_i) [c_{01}^{-2} \langle a_5 c_0 s_1 + a_8 s_0 c_1 \rangle + c_{02}^{-2} \langle a_5 c_0 s_2 - a_8 s_0 c_2 \rangle - \\ & - 2 c_{01}^{-3} \langle a_5 s_1 (s_0^2 + 3) + a_8 s_0 (c_0 c_1 - 2) \rangle - 2 c_{02}^{-3} \langle a_5 s_2 (s_0^2 + 3) - \\ & - a_8 s_0 (c_0 c_2 + 2) \rangle + 12 s_0 \langle s_1 c_{01}^{-4} (a_8 c_0 s_1 - a_5 s_0 c_1) + \\ & + s_2 c_{02}^{-4} (a_8 c_0 s_2 + a_5 s_0 c_2) \rangle + 24 s_0^2 s_1 c_{01}^{-5} \langle a_5 (c_0 c_1 + 1) - \\ & - a_8 s_0 s_1 \rangle - 24 s_0^2 s_2 c_{02}^{-5} \langle a_5 (c_0 c_2 - 1) + a_8 s_0 s_2 \rangle] \left. \right\}, \quad (46b) \end{aligned}$$



$$\frac{\partial^3 [\bar{q}_n]_i^{IV}}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\pi^3}{8 a^4} \left\{ -c_{01}^{-2} \langle a_9 s_0 s_1 + a_5 (c_0 c_1 - 2) + 2 a_7 c_0 c_1 \rangle + c_{02}^{-2} \langle a_9 s_0 s_2 - \right. \\
- a_5 (c_0 c_2 + 2) - 2 a_7 c_0 c_2 \rangle + 2 c_{01}^{-3} \langle 2 a_7 (s_0^2 c_1 - c_0 s_1^2) - 3 s_1 (a_5 c_0 s_1 + \\
+ a_8 s_0 c_1) \rangle + 2 c_{02}^{-3} \langle 2 a_7 (s_0^2 c_2 + c_0 s_2^2) + 3 s_2 (a_5 c_0 s_2 - a_8 s_0 c_2) \rangle + \\
+ 6 s_1 c_{01}^{-4} \langle (a_6 s_0 + a_5 s_1) (c_0 c_1 + 1) + s_0 s_1 (2 a_7 s_0 - a_8 s_1) \rangle + \\
+ 6 s_2 c_{02}^{-4} \langle (a_6 s_0 + a_5 s_2) (c_0 c_2 - 1) - s_0 s_2 (2 a_7 s_0 - a_8 s_2) \rangle + \\
+ \frac{\pi}{a} (x - u_i) [c_{01}^{-2} (a_5 s_0 c_1 + a_8 c_0 s_1) + c_{02}^{-2} (a_5 s_0 c_2 - a_8 c_0 s_2) - \\
- 2 c_{01}^{-3} \langle a_5 s_0 (3 - s_1^2) + a_8 s_1 (s_0^2 + 3 c_0 c_1) \rangle + 2 c_{02}^{-3} \langle a_5 s_0 (3 - s_2^2) + \\
+ a_8 s_2 (s_0^2 - 3 c_0 c_2) \rangle + 6 s_1 c_{01}^{-4} \langle 2 s_0 (a_5 c_0 s_1 + a_8 s_0 c_1) + a_8 (s_0^2 c_1 - \\
- c_0 s_1^2) \rangle - 6 s_2 c_{02}^{-4} \langle 2 s_0 (a_5 c_0 s_2 - a_8 s_0 c_2) - a_8 (s_0^2 c_2 + c_0 s_2^2) \rangle - 24 s_0 s_1^2 c_{01}^{-5} \\
\left. \langle a_5 (c_0 c_1 + 1) - a_8 s_0 s_1 \rangle - 24 s_0 s_2^2 c_{02}^{-5} \langle a_5 (c_0 c_2 - 1) + a_8 s_0 s_2 \rangle \right\}, \quad (46c)$$

$$\frac{\partial^3 [\bar{q}_n]_i^{IV}}{\partial y^3} = -\frac{\pi^3}{8 a^4} \left\{ c_{01}^{-2} \langle a_6 (c_0 c_1 - 2) + 2 a_7 s_0 s_1 \rangle - c_{02}^{-2} \langle a_6 (c_0 c_2 + 2) - \right. \\
- 2 a_7 s_0 s_2 \rangle + 6 s_1 c_{01}^{-3} \langle a_6 c_0 s_1 - 2 a_7 s_0 c_1 \rangle + 6 s_2 c_{02}^{-3} \langle a_6 c_0 s_2 + \\
- 2 a_7 s_0 c_2 \rangle - 6 s_1^2 c_{01}^{-4} \langle a_6 (c_0 c_1 + 1) + 2 a_7 s_0 s_1 \rangle + 6 s_2^2 c_{02}^{-4} \langle a_6 (c_0 c_2 - \\
- 1) - 2 a_7 + s_0 s_2 \rangle + \frac{\pi}{a} (x - u_i) [c_{01}^{-2} (a_5 c_0 s_1 + a_8 s_0 c_1) + c_{02}^{-2} (a_5 c_0 s_2 - \\
- a_8 s_0 c_2) + 2 c_{01}^{-3} \langle a_5 s_1 (8 - 7 c_0 c_1) + a_8 s_0 (7 s_1^2 - 3) \rangle + 2 c_{02}^{-3} \\
\langle a_5 s_2 (8 + 7 c_0 c_2) + a_8 s_0 (7 s_2^2 - 3) \rangle - 36 \langle s_1^2 c_{01}^{-4} (a_5 c_0 s_1 + a_8 s_0 c_1) + \\
+ s_2^2 c_{02}^{-4} (a_5 c_0 s_2 - a_8 s_0 c_2) \rangle + 24 s_1^3 c_{01}^{-5} \langle a_5 (c_0 c_1 + 1) - a_8 s_0 s_1 \rangle - 24 s_2^3 c_{02}^{-5} \\
\left. \langle a_5 (c_0 c_2 - 1) + a_8 s_0 s_2 \rangle \right\}. \quad (46d)$$

Mit den Ausdrücken (39), (40) und (43) bis (46) können nun auch die Randbedingungen (34) für den Ansatz (33) angeschrieben werden. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem. Die Anzahl der unbekannten Ansatz-Singularitäten ist doppelt so groß wie die Zahl der Kollokationspunkte.

## 5.2 Trefftzsches Verfahren

Bei der Anwendung der Kollokationsmethode sind hier (vgl. 7) ähnlich schlechte Erfahrungen gemacht worden, wie sie *Pucher* schon beschrieben hat. Es wurde daher nach einer wirksameren Methode zur Erfüllung der Randbedingungen gesucht. Zu diesem Zweck wurde das Trefftzsche Verfahren auf Platten unter singulären Belastungen erweitert. Für Platten unter stetiger Belastung hat *Berger* [16] diese Erweiterung schon durchgeführt. *Trefftz* hat seine Methode am Beispiel der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie dargestellt [2]. Charakteristisch für sein Verfahren ist, daß man die Minaleigenschaften des Problems bei der Lösung benutzt und von Ansätzen ausgeht, die der Differentialgleichung genügen, jedoch keinerlei Randbedingungen zu erfüllen haben.

Um eine in sich geschlossene Darstellung zu erreichen, wird das Verfahren in allgemeinerer Form abgeleitet, als es für die vorliegende Aufgabenstellung notwendig wäre. Dabei werden Platten unter beliebigen singulären Belastungen bei beliebigen Randbedingungen betrachtet. Grundlage aller Ableitungen ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

### 5.21 Ansatz

Für die Lösung wird wieder ein Ansatz in der Form (6) verwendet.

$$[k] = S(x, y, u, v) + R(x, y) = S + \sum_i c_i f_i \quad (47)$$

$k$  steht für eine beliebige Kraft- oder Verformungsgröße der Platte.

$S$  genügt der Differentialgleichung und der Singularitätsbedingung,  $R$  der homogenen Differentialgleichung.

### 5.22 Einflußflächen für Verformungsgrößen

*I. Die Ansatzfunktionen erfüllen alle geometrischen Randbedingungen*

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen führt hier auf das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, mit dessen Hilfe die Minimalfunktion gebildet wird.

$$\Phi = \Pi_a + \Pi_i \rightarrow \min. \quad (48)$$

Die Ausdrücke für das innere und äußere Potential setzen sich entsprechend dem Ansatz aus verschiedenen Anteilen zusammen.

$$\Pi_a = \Pi_a(S) + \Pi_a(R) \quad (49)$$

$$\Pi_i = \Pi_i(S) + \Pi_i(R, S) + \Pi_i(R)$$

Das innere Potential stellt eine in den Ableitungen von  $w$  quadratische Form dar. Daher ergibt sich im Gegensatz zum äußeren Potential ein gemischter Anteil  $\Pi_i(R, S)$ . Da der Singularteil als fester und unveränderlicher Bestandteil der Lösung anzusehen ist, der nicht variiert werden kann, ergibt sich für die Minimalfunktion

$$\Phi(R) = \Pi_a(R) + \Pi_i(R, S) + \Pi_i(R). \quad (50)$$

Setzt man voraus, daß an den Rändern keine Zwangsverformungen auftreten, so ergibt sich das äußere Potential hier zu:

$$\Pi_a = \begin{cases} -\text{„}P\text{“} [w]_{(u,v)} & \text{für } [w] \\ -\text{„}M_m\text{“} \frac{\partial \left[ \frac{\partial w}{\partial m} \right]}{\partial m} (u, v) & \text{für } \left[ \frac{\partial w}{\partial m} \right]. \end{cases} \quad (51)$$

„ $P$ “ und „ $M_m$ “ haben die Bedeutung von Einheitskraftgrößen und sind damit konstant. Der Index  $m$  soll eine beliebige Schnitttrichtung andeuten. Für den in der Minimalfunktion auftretenden Anteil des äußeren Potentials folgt dann:

$$\Pi_a(R) = \begin{cases} -,,P'' R(u, v) \\ -,,M_m'' \frac{\partial R}{\partial m}(u, v). \end{cases} \quad (52)$$

Das innere Potential entspricht der Formänderungsarbeit der inneren Kräfte.

$$\Pi_t = \frac{N}{2} \iint_F [(\Delta[w])^2 - 2(1 - \mu)([w]_{xx}[w]_{yy} - [w]_{xy}^2)] dx dy \quad (53)$$

Nach Einführung des Ansatzes (47) erhält man:

$$\begin{aligned} \Pi_t(S) &= \frac{N}{2} \iint_F [(\Delta S)^2 - 2(1 - \mu)(S_{xx}S_{yy} - S_{xy}^2)] dx dy, \\ \Pi_t(R) &= \frac{N}{2} \iint_F [(\Delta R)^2 - 2(1 - \mu)(R_{xx}R_{yy} - R_{xy}^2)] dx dy, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\Pi_t(R, S) = N \iint_F [\Delta S \Delta R - (1 - \mu)(S_{xx}R_{yy} + S_{yy}R_{xx} - 2S_{xy}R_{xy})] dx dy.$$

Die von  $R$  abhängigen Anteile werden, da nur *sie* bei der Variation benötigt werden, noch weiter umgeformt:

$$\begin{aligned} \Pi_t(R, S) &= N \iint_F [S_{xx}R_{xx} + S_{yy}R_{yy} + \mu(S_{xx}R_{yy} + S_{yy}R_{xx}) + \\ &\quad + 2(1 - \mu)S_{xy}R_{xy}] dx dy. \end{aligned} \quad (55)$$

Unter Berücksichtigung der Stetigkeitseigenschaften der Funktionen folgt aus den einzelnen Anteilen durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \iint S_{xx}R_{xx} dx dy &= \int S_x R_{xx} dy - \iint S_x R_{xxx} dx dy = \\ &= \int \left[ \frac{\partial}{\partial x}(S_x R_{xx}) - S_x R_{xxx} \right] dx dy, \\ \iint S_x R_{xxx} dx dy &= \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x}(S R_{xxx}) - S R_{xxxx} \right] dx dy, \\ \iint S_{xx}R_{xx} dx dy &= \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x}(S_x R_{xx} - S R_{xxx}) + S R_{xxxx} \right] dx dy. \end{aligned} \quad (56)$$

Entsprechend ergibt sich für die anderen Anteile

$$\iint S_{yy}R_{yy} dx dy = \iint \left[ \frac{\partial}{\partial y}(S_y R_{yy} - S R_{yyy}) + S R_{yyyy} \right] dx dy, \quad (57)$$

$$\iint S_{xx}R_{yy} dx dy = \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x}(S_x R_{yy} - S R_{xyy}) + S R_{xxyy} \right] dx dy, \quad (58)$$

$$\iint S_{yy}R_{xx} dx dy = \iint \left[ \frac{\partial}{\partial y}(S_y R_{xx} - S R_{xxy}) + S R_{xyxy} \right] dx dy, \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
\iint S_{xy} R_{xy} \, dx \, dy &= \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x} (S_y R_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y} (S R_{xx}) + S R_{xxyy} \right] dx \, dy, \\
&= \iint \left[ \frac{\partial}{\partial y} (S_x R_{xy}) - \frac{\partial}{\partial x} (S R_{xyy}) + S R_{xxyy} \right] dx \, dy \\
&= \frac{1}{2} \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x} (S_y R_{xy} - S R_{xyy}) + \frac{\partial}{\partial y} (S_x R_{xy} - S R_{xx}) \right] dx \, dy + \\
&\quad + \iint S R_{xxyy} \, dx \, dy. \quad (60)
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke (56) bis (60) werden in den gemischten Anteil des inneren Potentials eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\Pi_i(R, S) &= N \iint_F S \Delta R \, dx \, dy + N \iint_F \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [S_x (R_{xx} + \mu R_{yy}) + \right. \\
&\quad + (1 - \mu) S_y R_{xy} - S (R_{xxx} + R_{xyy})] + \frac{\partial}{\partial y} [S_y (R_{yy} + \mu R_{xx}) + \\
&\quad \left. + (1 - \mu) S_x R_{xy} - S (R_{yyy} + R_{xxy})] \right\} dx \, dy \quad (61)
\end{aligned}$$

Das erste Flächenintegral entfällt, da  $R$  der homogenen Differentialgleichung  $\Delta R = 0$  genügt. Das zweite Flächenintegral wird mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in ein Kurvenintegral umgewandelt:

$$\iint_F (G_x + H_y) \, dx \, dy = \oint_s [F \, dy - G \, dx]. \quad (62)$$

Ist der Bereich  $F$  wie im vorliegenden Fall geradlinig begrenzt, so läßt sich mit den Bezeichnungen der Abb. 8 weiter schreiben

$$\oint_s [G \, dy - H \, dx] = \oint_s \left[ G \frac{dy}{ds} - H \frac{dx}{ds} \right] ds = \oint_s [G \bar{s} - H \bar{c}] \, ds. \quad (63)$$

Auf  $\Pi_i(R, S)$  angewendet erhält man

$$\begin{aligned}
\Pi_i(R, S) &= N \oint_s \{ S_x [(R_{xx} + \mu R_{yy}) \bar{s} - (1 - \mu) R_{xy} \bar{c} - S (R_{xxx} + R_{xyy}) \bar{s} - \\
&\quad - S_y [(R_{yy} + \mu R_{xx}) \bar{c} - (1 - \mu) R_{xy} \bar{s} + S (R_{yyy} + R_{xxy}) \bar{c}] \} \, ds. \quad (64)
\end{aligned}$$

Nach einiger Zwischenrechnung ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}
\Pi_i(R, S) &= N \oint_s \left\{ \frac{\partial S}{\partial n} [(\bar{s}^2 + \mu \bar{c}^2) R_{xx} + 2(1 - \mu) \bar{s} \bar{c} R_{xy} + (\bar{c}^2 + \mu \bar{s}^2) R_{yy}] + \right. \\
&\quad + (1 - \mu) \frac{\partial S}{\partial s} [-\bar{s} \bar{c} (R_{yy} - R_{xx}) + (\bar{s}^2 - \bar{c}^2) R_{xy}] - \\
&\quad \left. - S [\bar{s} (R_{xxx} + R_{xyy}) - \bar{c} (R_{yyy} + R_{xxy})] \right\} ds. \quad (65)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für das innere Potential läßt sich in eine übersichtlichere Form bringen, wenn man in (65) die folgenden Beziehungen für die am Rande  $n = \text{const}$  auftretenden Kraftgrößen einsetzt:

$$\begin{aligned} m_n(R) &= -N [(\bar{s}^2 + \mu \bar{c}^2) R_{xx} - 2(1 - \mu) \bar{s} \bar{c} R_{xy} + (\bar{c}^2 + \mu \bar{s}^2) R_{yy}], \\ m_{ns}(R) &= -(1 - \mu) N [-\bar{s} \bar{c} (R_{yy} - R_{xx}) + (\bar{s}^2 - \bar{c}^2) R_{xy}], \\ q_n(R) &= -N [\bar{s} (R_{xxx} + R_{xyy}) - \bar{c} (R_{xxy} + R_{yyy})]. \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} II_i(R, S) &= \oint_s \left\{ -\frac{\partial S}{\partial n} m_n(R) - \frac{\partial S}{\partial s} m_{ns}(R) + S q_n(R) \right\} ds \\ II_i(R, S) &= \oint_s \left\{ -\frac{\partial S}{\partial n} m_n(R) + S \bar{q}_n(R) \right\} ds. \end{aligned} \quad (67)$$

Auf Grund der über die Ansatzfunktionen gemachten Voraussetzungen soll hier nach den Verformungen variiert werden. Daher kann der gemischte Anteil des inneren Potentials in dieser Form (67) noch nicht verwendet werden. Man wendet zur Umformung den Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungsarbeiten an.

$$\begin{aligned} \oint_s \left\{ -\frac{\partial S}{\partial n} m_n(R) + S \bar{q}_n(R) \right\} ds &= \left\{ \begin{array}{l} \text{,,}P\text{“ } R(u, v) \\ \text{,,}M_m\text{“ } \frac{\partial R}{\partial m}(u, v) \end{array} \right\} + \\ &+ \oint_s \left\{ -\frac{\partial R}{\partial n} m_n(S) + R \bar{q}_n(S) \right\} ds \end{aligned} \quad (68)$$

Beachtet man noch, daß

$$II_a(R) = \left\{ \begin{array}{l} -\text{,,}P\text{“ } R(u, v) \\ -\text{,,}M_m\text{“ } \frac{\partial R}{\partial m}(u, v) \end{array} \right\} \quad (69)$$

ist und sich für  $II_i(R)$  durch eine entsprechende Umformung

$$II_i(R) = \frac{1}{2} \oint_s \left\{ -\frac{\partial R}{\partial n} m_n(R) + R \bar{q}_n(R) \right\} ds \quad (70)$$

ergibt, so erhält man schließlich für die Minimalfunktion (50) folgenden Ausdruck:

$$\Phi = \oint_s \left\{ -\frac{\partial R}{\partial n} m_n(S) + R \bar{q}_n(S) \right\} ds + \frac{1}{2} \oint_s \left\{ -\frac{\partial R}{\partial n} m_n(R) + R \bar{q}_n(R) \right\} ds. \quad (71)$$

Nach Einführung des Ansatzes (47) ergibt die Variation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial c_K} = \frac{1}{2} \oint_s \left\{ -\frac{\partial R}{\partial n} m_n(f_K) + R \bar{q}_n(f_K) - \frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(R) + f_K \bar{q}_n(R) \right\} ds + \\ + \oint_s \left\{ -\frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(S) + f_K \bar{q}_n(S) \right\} ds = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Da  $R$  und  $f_K$  der homogenen Differentialgleichung genügen, kann wieder der Bettische Satz angewendet werden.

$$\oint_s \left\{ -\frac{\partial R}{\partial n} m_n(f_K) + R \bar{q}_n(f_K) \right\} ds = \oint_s \left\{ -\frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(R) + f_K \bar{q}_n(R) \right\} ds \quad (73)$$

Man erhält dann aus (72)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_K} = \oint_s \left\{ -\frac{\partial f_K}{\partial n} [m_n(S) + m_n(R)] + f_K [\bar{q}_n(S) + \bar{q}_n(R)] \right\} ds = 0 \quad (74)$$

Diese Beziehung läßt nun eine anschauliche, mechanische Deutung zu.

$$m_n(S) + m_n(R) = m_n([k]) \quad (75)$$

$$\bar{q}_n(S) + \bar{q}_n(R) = \bar{q}_n([k])$$

$m_n([k])$  und  $\bar{q}_n([k])$  stellen an den Rändern mit Kräfte- und Randbedingungen die Randabweichungen dar, die bei endlicher Gliederzahl des Ansatzes auftreten.

Bei der Fehlerquadratmethode wird das Integral über die Quadrate der Abweichungen längs der Ränder zu Null gemacht. Hier wird nun das Integral über die Arbeiten der Randabweichungen auf den zugehörigen Wegen der Ansatzfunktionen längs der Ränder gleich Null gesetzt. Die Randabweichungen werden also bei dieser Methode mit sinnvollen Gewichten versehen, womit das bei der Fehlerquadratmethode auftretende Gewichtsproblem entfällt.

Zur Bestimmung der Unbekannten ergibt sich schließlich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \oint_s \left\{ -\frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(R) + f_K \bar{q}_n(R) \right\} ds = \oint_s \left\{ \frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(S) - f_K \bar{q}_n(S) \right\} ds, \\ \oint_s \left\{ -\frac{\partial f_K}{\partial n} \sum_i c_i m_n(f_i) + f_K \sum_i c_i \bar{q}_n(f_i) \right\} ds = \oint_s \left\{ \frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(S) - f_K \bar{q}_n(S) \right\} ds, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\sum_i c_i \left[ \oint_s \left\{ -\frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(f_i) + f_K \bar{q}_n(f_i) \right\} ds \right] = \oint_s \left\{ \frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(S) - f_K \bar{q}_n(S) \right\} ds.$$

$$K = 1, 2, \dots, i_n$$

## II. Die Ansatzfunktionen erfüllen alle Kräfte- und Randbedingungen

Dieser Fall wird zwar selten vorkommen, soll aber der Vollständigkeit halber ebenfalls behandelt werden. Man vergleicht hier Funktionen miteinander, die alle Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Variiert wird also der Kräftezustand. Da die äußeren (singulären) Kräfte schon durch die singuläre Lösung erfaßt werden, also unveränderlich sind, liefert das äußere Potential (52) bei der Variation keinen Beitrag. Man wird hier auf das Castiglianosche Prinzip geführt.

$$\Phi = \Pi_i \rightarrow \min. \quad (77)$$

$$\Phi = \Pi_i(R, S) + \Pi_i(R) \quad (78)$$

Für das gemischte Glied der Formänderungsarbeit kann diesmal, da nach den Kräften variiert wird, direkt die Form (67) verwendet werden.

$$\Phi = \oint_s \left\{ -\frac{\partial S}{\partial n} m_n(R) + S \bar{q}_n(R) \right\} ds + \frac{1}{2} \oint_s \left\{ -\frac{\partial R}{\partial n} m_n(R) + R \bar{q}_n(R) \right\} ds \quad (79)$$

Man führt wieder den Ansatz (47) ein, bzw.

$$m_n(R) = \sum_i c_i m_n(f_i), \quad (80)$$

$$\bar{q}_n(R) = \sum_i c_i \bar{q}_n(f_i).$$

Die Variation ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial c_K} = \oint_s \left\{ -\frac{\partial S}{\partial n} m_n(f_K) + S \bar{q}_n(f_K) \right\} ds + \frac{1}{2} \oint_s \left\{ -\frac{\partial R}{\partial n} m_n(f_K) + R \bar{q}_n(f_K) - \right. \\ \left. - \frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(R) + f_K \bar{q}_n(R) \right\} ds. \quad (81) \end{aligned}$$

Der Bettische Satz liefert

$$\oint_s \left\{ -\frac{\partial R}{\partial n} m_n(f_K) + R \bar{q}_n(f_K) \right\} ds = \oint_s \left\{ -\frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(R) + f_K \bar{q}_n(R) \right\} ds. \quad (82)$$

Damit ergibt sich aus (81)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_K} = \oint_s \left\{ -m_n(f_K) \left[ \frac{\partial S}{\partial n} + \frac{\partial R}{\partial n} \right] + \bar{q}_n(f_K) [S + R] \right\} ds. \quad (83)$$

Die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke stellen in diesem Falle die geometrischen Randabweichungen dar.

$$S + R = [k] \quad (84)$$

$$\frac{\partial S}{\partial n} + \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial [k]}{\partial n}.$$

Das Minimalprinzip liefert hier in Analogie zu (74) die Aussage, daß das Integral über die Arbeiten der Kräfte der einzelnen Ansatzfunktionen auf den Wegen der geometrischen Randabweichungen zu Null werden soll. Auch hier ist wieder der schon erwähnte Unterschied zur Fehlerquadratmethode zu erkennen. Die Bedingungen stellen sich, da sie aus dem Energieprinzip abgeleitet sind, in Form von Arbeitsausdrücken dar. Es ist dabei nicht notwendig, wie bei der Fehlerquadratmethode noch Gewichtsfestsetzungen zu treffen.

Zur Ermittlung der Unbekannten ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\oint_s \left\{ -m_n(f_K) \frac{\partial R}{\partial n} + \bar{q}_n(f_K) R \right\} ds = \oint_s \left\{ m_n(f_K) \frac{\partial S}{\partial n} - \bar{q}_n(f_K) S \right\} ds \quad (85)$$

bzw. nach Einsetzen des Ansatzes (80)

$$\sum_i c_i \left[ \oint_s \left\{ -m_n(f_K) \frac{\partial f_i}{\partial n} + \bar{q}_n(f_K) f_i \right\} ds \right] = \oint_s \left\{ m_n(f_K) \frac{\partial S}{\partial n} - \bar{q}_n(f_K) S \right\} ds. \\ K = 1, 2, \dots, i_n \quad (86)$$

### III. Die Ansatzfunktionen erfüllen keinerlei Randbedingungen

Die Behandlung dieses Falles sei hier nur kurz gestreift\*), da man sich wohl in den meisten Fällen Ansatzfunktionen beschaffen kann, die zumindest einen Teil der Randbedingungen schon erfüllen. Um zu einer Minimalaussage für irgendein Problem der Elastizitätstheorie zu gelangen, kann man verschiedene Wege einschlagen.

Meistens werden die beiden schon geschilderten Methoden benutzt, bei denen einmal der Verformungszustand variiert und der Kräftezustand festgehalten und zum anderen die Kräfte variiert und die Verformungen konstant gehalten werden. Grundsätzlich läßt sich natürlich noch ein dritter Weg gehen, indem man nämlich die Kräfte *und* die Verformungen variiert. An die Ansatzfunktionen brauchen dabei keinerlei Forderungen gestellt zu werden. Die Minimalfunktion muß hierbei natürlich entsprechend erweitert werden, nämlich so, daß sie das Problem vollständig beschreibt. Mit der Erfüllung der Minimalbedingung müssen dann sämtliche Randvorschriften befriedigt werden. Man erhält so das allgemeinste Variationsprinzip, das sich aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen herleiten läßt (vgl. auch [20] und [21]) und das die beiden bisher verwendeten Prinzipie als Sonderfälle enthält.

#### 5.23 Einflußflächen für Kraftgrößen

Bei der singulären Lösung  $S$  von Einflußflächen für Kraftgrößen zeigt sich der Unterschied gegenüber den Einflußflächen für Verformungsgrößen darin, daß die Unstetigkeit hier in der Funktion  $S$  selbst ( $[q]$ ), bzw. in ihrer ersten Ableitung ( $[m]$ ) auftritt.

\*) Genauer ist bei E. R. Berger [16] S. 45 zu finden.



Bei der Umformung des gemischten Anteiles der Formänderungsarbeit muß man daher unter Beachtung der Stetigkeitseigenschaften der Funktionen hier gerade umgekehrt vorgehen, wie bei den Einflußflächen für Verformungsgrößen; im übrigen verläuft die Ableitung von einigen Abweichungen abgesehen in ähnlicher Form wie in 5.22. Sie wird hier nicht wiedergegeben.

Man erhält für den Fall, daß die Ansatzfunktionen die geometrischen Randbedingungen erfüllen, wieder das lineare Gleichungssystem

$$\sum_i c_i \left[ \oint_s \left\{ -\frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(f_i) + f_K \bar{q}_n(f_i) \right\} ds \right] = \oint_s \left\{ \frac{\partial f_K}{\partial n} m_n(S) - f_K \bar{q}_n(S) \right\} ds, \\ K = 1, 2, \dots, i_n \quad (87)$$

bzw. wenn die Kräfte- und Randbedingungen erfüllt werden, das Gleichungssystem

$$\sum_i c_i \left[ \oint_s \left\{ -m_n(f_K) \frac{\partial f_i}{\partial n} + \bar{q}_n(f_K) f_i \right\} ds \right] = \oint_s \left\{ m_n(f_K) \frac{\partial S}{\partial n} - \bar{q}_n(f_K) S \right\} ds. \quad (88) \\ K = 1, 2, \dots, i_n$$

#### 5.24 Anwendung des Trefftzschen Verfahrens

Mit dem Trefftzschen Verfahren sind die Ansätze (19) und (33) behandelt worden. Diese Ansätze erfüllen schon die geometrischen Randbedingungen. Es liegt also der in 5.23 behandelte Fall vor. Zur Bestimmung der Ansatzkonstanten ist demgemäß das lineare Gleichungssystem (87) heranzuziehen.

Die Randgrößen  $m_n$  und  $\bar{q}_n$  der Ansatzfunktionen können für den Ansatz (19) aus (41) und (42) und für den Ansatz (33) aus (43) bis (46) gebildet werden. Die entsprechenden Randgrößen für den Singularteil ergeben sich für beide Ansätze aus (39) und (40). Die in (87) noch auftretenden Randneigungen der Ansatzfunktionen  $\partial f_K / \partial n$  können entsprechend (26a) aus den ersten Ableitungen gebildet werden.

Die in den Integranden von (87) auftretenden Funktionen sind so komplizierter Bauart, daß eine geschlossene Integration nicht möglich ist.

Bei der rechnerischen Auswertung mußten diese Integrationen daher numerisch ausgeführt werden (vgl. Abschnitt 7).

#### 5.3 Fehlerquadratmethode

Nach der Fehlerquadratmethode wird das Integral über die Quadrate der Randabweichungen zum Minimum gemacht. Für den freien Rand ergibt sich danach die Forderung

$$J = \int_s m^2 ds + \lambda \int_s \bar{q}^2 ds \rightarrow \min. \quad (89)$$

$\lambda$  stellt hierin einen willkürlich wählbaren Faktor dar, der zunächst die Aufgabe hat, die beiden Anteile des Minimalausdrucks dimensionsgleich zu machen. Auf diesen Gewichtungsfaktor wird noch einmal an späterer Stelle (7.3 S. 125) eingegangen.

Mit dem üblichen Ansatz der Form (6) erhält man aus (89)

$$J = \int_s [m(S) + m(R)]^2 ds + \lambda \int_s [\bar{q}(S) + \bar{q}(R)]^2 ds \rightarrow \min.$$

Die partielle Differentiation nach den Freiwerten des Ansatzes ergibt

$$\frac{\partial J}{\partial c_K} = \int_s [m(S) + m(R)] m_K ds + \lambda \int_s [\bar{q}(S) + \bar{q}(R)] \bar{q}_K ds = 0, \quad (90)$$

$$K = 1, 2 \dots n$$

$$\int_s m(R) m_K ds + \lambda \int_s \bar{q}(R) \bar{q}_K ds = - \left\{ \int_s m(S) m_K ds + \lambda \int_s \bar{q}(S) \bar{q}_K ds \right\}. \quad (91)$$

Mit dem Summenansatz für den Regularanteil

$$m(R) = \sum_i c_i m_i,$$

$$\bar{q}(R) = \sum_i c_i \bar{q}_i$$

folgt aus (91), wenn man noch die Integrale unter das Summenzeichen nimmt,

$$\sum_i c_i \left[ \int_s m_i m_K ds + \lambda \int_s \bar{q}_i \bar{q}_K ds \right] = - \left\{ \int_s m(S) m_K ds + \lambda \int_s \bar{q}(S) \bar{q}_K ds \right\}. \quad (92)$$

Zur Bestimmung der unbekannten Ansatzkonstanten ist das durch (92) dargestellte lineare Gleichungssystem zu lösen.

#### 5.4 Teilstreckenkollokation

Bei dieser Methode\*), die eine Variante der Kollokationsmethode darstellt, werden die Randwerte zu resultierenden Einzelwirkungen in den gewählten Kollokationspunkten zusammengefaßt. Für diese Resultierenden sind die Randbedingungen zu erfüllen.

Zur Ermittlung der Resultierenden wird, da sich geschlossene Integrationen nicht durchführen lassen, in folgender Weise vorgegangen.

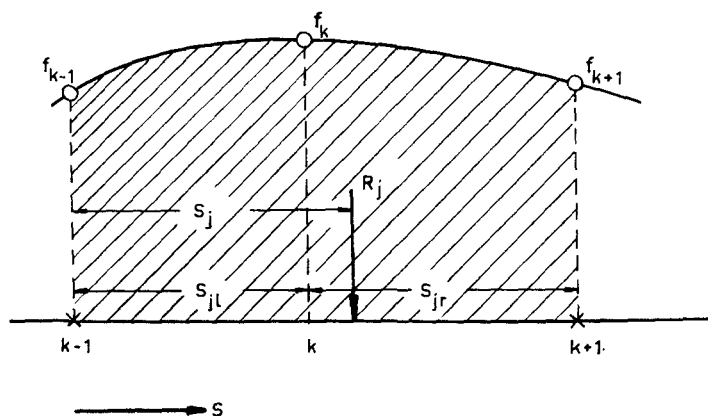


Abb. 9. Intervallteilung bei Teilstreckenkollokation

$k$  Laufzahl für Stützpunkte

$j$  Laufzahl für Randwertresultierende (über 2 Intervalle)

$o$  Stützpunkte

$x$  Kollokationspunkte

\*) Diese Methode ist in der letzten Zeit in einigen Schweizer Arbeiten mit Erfolg verwendet worden und geht auf Stüssi zurück, der das Verfahren unter dem Namen Knotenlastmethode eingeführt hat.

Die Randwerte der singulären Lösung und der Ansatzfunktionen werden für eine Anzahl von Stützpunkten numerisch berechnet. Der gegebene Randwertverlauf wird dann durch Parabeln genähert, die durch jeweils drei Stützpunkte gelegt werden (vgl. Abb. 9).

Für die Resultierende und deren Abstand vom linken Rand des Doppelintervalls ergibt sich

$$R_j = \frac{s_{jl} + s_{jr}}{6 s_{jl} s_{jr}} \{f_{k-1} (2 s_{jl} s_{jr} - s_{jr}^2) + f_k (s_{jl} + s_{jr})^2 + f_{k+1} (2 s_{jl} s_{jr} - s_{jl}^2)\}, \quad (93)$$

$$s_j = \frac{3}{4} (s_{jl} + s_{jr}) - \frac{1}{R_j} \frac{(s_{jl} + s_{jr})^2}{24 s_{jl} s_{jr}} [f_{k-1} (4 s_{jl} s_{jr} - s_{jr}^2) + f_k (s_{jl} + s_{jr})^2 - f_{k+1} s_{jl}^2]. \quad (94)$$

Faßt man jeden 2. Stützpunkt als Kollokationspunkt auf, so ergibt die Aufteilung der Resultierenden auf die Kollokationspunkte

$$R_{jl} = \frac{s_{jl} + s_{jr} - s_j}{s_{jl} + s_{jr}} R_j, \quad R_{jr} = \frac{s_j}{s_{jl} + s_{jr}} R_j. \quad (95)$$

Die Gesamtresultierenden in den Kollokationspunkten setzen sich mit Ausnahme des Anfangs- und Endpunktes aus jeweils zwei Anteilen aus den benachbarten Doppelintervallen zusammen:

$$R_{k-1} = R_{j-1,r} + R_{j,l}, \quad (96)$$

$$R_{k+1} = R_{j,r} + R_{j+1,l}.$$

Die Randbedingungen liefern dann in üblicher Weise (vgl. Kollokationsmethode) ein lineares Gleichungssystem zur Ermittlung der unbekannten Ansatzkonstanten.

## 6. Methode der konformen Abbildung

*Schultz-Grunow* [15] hat zur Ermittlung von Greenschen Funktionen für Platten zum ersten Mal die Methode der konformen Abbildung benutzt. In den Arbeiten [19] und [22] wurde das Verfahren auf schiefwinklige Bereiche angewendet.

Der gegebene Plattenbereich wird bei dieser Methode auf das Innere des Einheitskreises konform abgebildet. Die Vorteile dieses Verfahrens bestehen nach [15] und [19] darin, daß die Randbedingungen in den Ecken und ihrer Umgebung exakt erfüllt werden können und die Reihenentwicklungen des Regularteils, der in der Abbildungsebene definiert wird, eine bessere Konvergenz aufweisen.

Die Abbildung eines polygonalen Plattenbereichs auf den Einheitskreis bewirkt die Schwarz-Christoffelsche Abbildungsformel (Bezeichnungen vgl. Abb. 10).

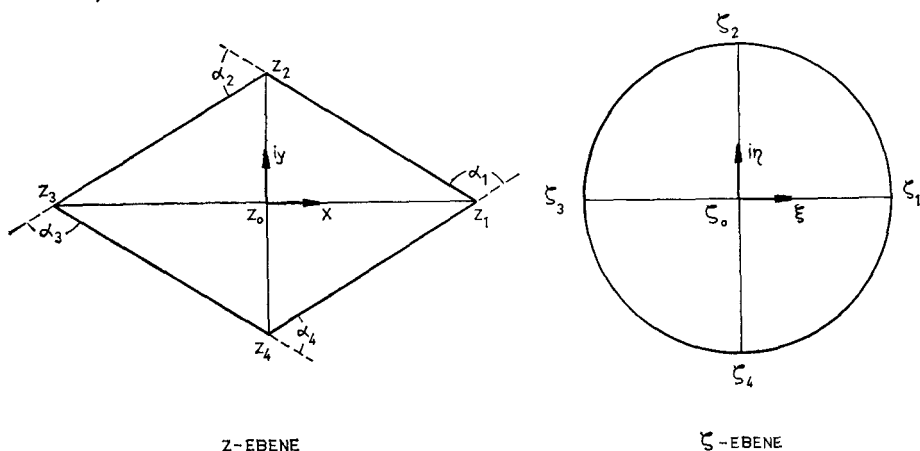


Abb. 10. Konforme Abbildung eines schiefwinkligen Bereichs

$$\frac{dz}{d\zeta} = C_1 \prod_K (\zeta - \zeta_K)^{-\frac{\alpha_K}{\pi}} \quad K = 1 \dots 4 \quad (97)$$

Integriert man (97), so erhält man

$$z = C_1 \int \prod_K (\zeta - \zeta_K)^{-\frac{\alpha_K}{\pi}} d\zeta + C_2. \quad (98)$$

Zunächst ist nun untersucht worden, bei welchen Verhältnissen der Winkel  $\alpha_K$  sich für  $\zeta = f(z)$  ein geschlossener Ausdruck angeben läßt. Heinen [19] gibt beispielsweise an, daß die konforme Abbildung bei beliebigen Winkeln  $\alpha_K$  große Schwierigkeiten bereitet. Eine Lösung in erträglichem Rahmen sei hier nur möglich, wenn  $\alpha_K$  ein rationales Vielfaches von  $\pi$  beträgt. So gibt er für eine parallelogrammförmige Platte mit den Außenwinkeln  $1/3\pi$  und  $2/3\pi$  die Lösung des Abbildungsintegrals an.

In der vorliegenden Arbeit sind für das Abbildungsintegral einer parallelogrammförmigen Platte mit den Außenwinkeln  $1/4\pi$  und  $3/4\pi$  zwei Lösungswege gefunden worden, die sich aus verschiedenen Substitutionen ergeben.  $z(\zeta)$  läßt sich dann mit Hilfe der elliptischen Funktionen 1. Gattung angeben, jedoch kann die Umkehrfunktion  $\zeta(z)$  nicht explizit gebildet werden. Außerdem stößt man bei der weiteren Verfolgung dieses Lösungsweges auf nicht-lineare Gleichungssysteme, deren Lösung sehr große numerische Schwierigkeiten bereitet.

Betrachtet man andere rationale Vielfache für die Außenwinkel  $\alpha_K$ , beispielsweise  $1/5\pi$  und  $4/5\pi$ , so läßt sich für das Abbildungsintegral keine geschlossene Lösung mehr angeben. Erst recht gilt dies für beliebige Werte der Außenwinkel.

Diese verschiedenen Erkenntnisse, insbesondere die Tatsache, daß das Verfahren jeweils nur für bestimmte Eckenwinkel angewendet werden kann, zeigen, daß die Methode, mit Hilfe einer konformen Abbildung zu den Randquerkraft-Einflußflächen für schiefe Platten beliebigen Winkels zu gelangen, nicht sehr geeignet erscheint.

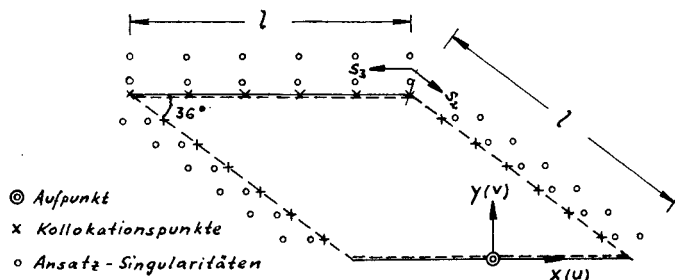
## 7. Vergleich der verschiedenen Verfahren an Hand numerischer Ergebnisse

Alle Rechnungen sind auf elektronischen Rechenanlagen durchgeführt worden\*). Die Ergebnisse werden nach den jeweils verwendeten Ansätzen und Methoden gegliedert dargestellt. Da nur eine bestimmte Kombination der Ansätze und Methoden zu guten Ergebnissen geführt hat (vgl. 7.3), werden die Ergebnisse der übrigen untersuchten Kombinationen nur allgemein beschrieben und nur so viele Einzelheiten darüber mitgeteilt, wie zum Vergleich der verschiedenen Verfahren notwendig sind.

## 7.1 Kollokationsmethode

### 7.11 Einzellast-Singularitäten außerhalb des Bereichs

Diese Rechnungen mit dem Ansatz (20) sind für verschiedene Aufpunkte auf dem gelagerten Rand und für verschiedene Lage und Anzahl der Singularitäten des Regularteils durchgeführt worden. Die grundsätzliche Anordnung der Ansatz-Singularitäten und Kollokationspunkte zeigt Abb. 11. Ein Kriterium für die Güte der Ergebnisse liefert die Kontrolle der Randwerte zwischen den Kollokationspunkten.



**Abb. 11. Anordnung der Einzellast-Singularitäten**

Betrachten wir im folgenden die Ergebnisse für eine  $36^\circ$  schiefe Platte, ermittelt aus einem Ansatz von 36 Einzellast-Singularitäten. Die Abweichungen der Randwerte sind in der Nähe der stumpfen Ecke am geringsten und nehmen in Richtung zur spitzen Ecke hin sehr stark zu. Die Abweichungen betragen z. B. für das Biegemoment am freien Rand ( $s_2$ ) in der Nähe der spitzen Ecke weit über hundert Prozent.

Als weitere Genauigkeitskontrolle wurden die Einflußflächen, die sich aus den Rechnungen mit 36 und mit 30 Unbekannten für den Aufpunkt in der Mitte des gelagerten Randes ergeben hatten, für eine konstante Belastung aus-

\*) An dieser Stelle möchte ich den Leitern und Mitarbeitern der Rechenzentren am Lehrstuhl für Massivbau und am Lehrstuhl für Praktische Mathematik der T. H. Hannover für ihr Entgegenkommen danken, mit dem sie immer die erforderliche Rechenzeit zur Verfügung gestellt haben.

gewertet. Die Ergebnisse zeigen eine Abweichung von 19 %. Schließlich wurden die Ordinaten der Einflußflächen an verschiedenen Punkten der Platte für den Aufpunkt in der spitzen Ecke bei unterschiedlicher Anordnung der Singularitäten des Regulariteiles miteinander verglichen. Die Abweichungen schwanken zwischen 3 und mehr als 100 % und sind insgesamt gesehen für die Einflußfelder mit dem Aufpunkt in der spitzen Ecke größer als bei denjenigen mit dem Aufpunkt in der Mitte des Randes.

Besonders hohe Abweichungen zeigen die Ordinaten in der Umgebung der spitzen Ecke. Die Ergebnisse, die sich mit diesem Ansatz und der Kollokationsmethode ergeben, sind also noch völlig unbrauchbar.

In allen weiteren Rechnungen wird als Grundlösung die verbesserte, modifizierte Randquerkraft-Singularität (18) verwendet, die in 3.2 abgeleitet wurde und die schon die Randbedingungen des gelenkig gelagerten Plattenstreifens erfüllt.

### 7.12 Homogene Lösung

Bei einem Teil dieser Rechnungen mit dem verbesserten Singularteil und der homogenen Lösung als Ansatz (19) wurden die Symmetrieverhältnisse des Systems — wie unter 5.1 beschrieben — ausgenutzt. Wiederum wurden Platten verschiedener Schiefe für mehrere Aufpunktslagen und mit unterschiedlicher Gliederzahl im Ansatz untersucht.

Die Endergebnisse sind noch von völlig unzureichender Genauigkeit, daher soll hier auf Einzelheiten dieser Ergebnisse nicht eingegangen werden.

Ein Effekt jedoch, der sich hierbei sehr deutlich herausgestellt hat, sei erwähnt. Durch die Aufspaltung der Einflußfunktion in symmetrische und antisymmetrische Anteile, haben sich bei der Durchrechnung große numerische Ungenauigkeiten durch kleine Differenzen großer Zahlen ergeben. Dieser Effekt tritt um so stärker hervor, je größer der Einfluß der Gegensingularität auf den der eigentlichen Singularität näher liegenden schiefen Rand ist.

Um diese Erscheinung auszuschalten, wird bei allen folgenden Rechnungen auf die Symmetrie-Aufteilung verzichtet. Außerdem wird zur Vereinfachung der Plattenhalbstreifen mit nur einem schiefen Rand betrachtet.

Die Ergebnisse dieser Rechnungen haben zu den folgenden zwei wesentlichen Erkenntnissen geführt:

1. Die allgemeine homogene Lösung ist für den Aufbau des Regulariteiles der Randquerkraft-Einflußfläche ungeeignet, und zwar um so mehr, je kleiner der spitze Winkel des schiefen Randes ist.
2. Vermehrt man bei der Kollokationsmethode die Anzahl der Ansatzfunktionen, so führt das im allgemeinen nicht zu einer Verbesserung der Ergebnisse, sondern kann sie sogar verschlechtern.

Zur Begründung und Erläuterung dieser Feststellungen sei folgendes gesagt. Die erste Folgerung läßt sich aus den Ergebnissen mehrerer Vergleichsrechnungen für verschiedene Schiefenwinkel ablesen; sie läßt sich aber auch rein theoretisch u. a. durch eine Eigenart des funktionellen Aufbaus der homogenen Lösung begründen, die darin besteht, daß der von  $x$  abhängige Anteil der Funktion mit dem  $y$ -Anteil über die Reihenlaufzahl  $i$  gekoppelt ist.

Die zweite Folgerung, die Methoden zur Erfüllung der Randbedingungen betreffend, ergibt sich aus den Rechnungen für ein Beispiel mit einem fast rechtwinkligen freien Rand. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 12–15 dargestellt. Diese Abbildungen zeigen den Verlauf der Randwerte von Biegemoment und Randquerkraft am freien schiefen Rand für zwei Rechnungen mit 6 und 12 Kollokationspunkten.

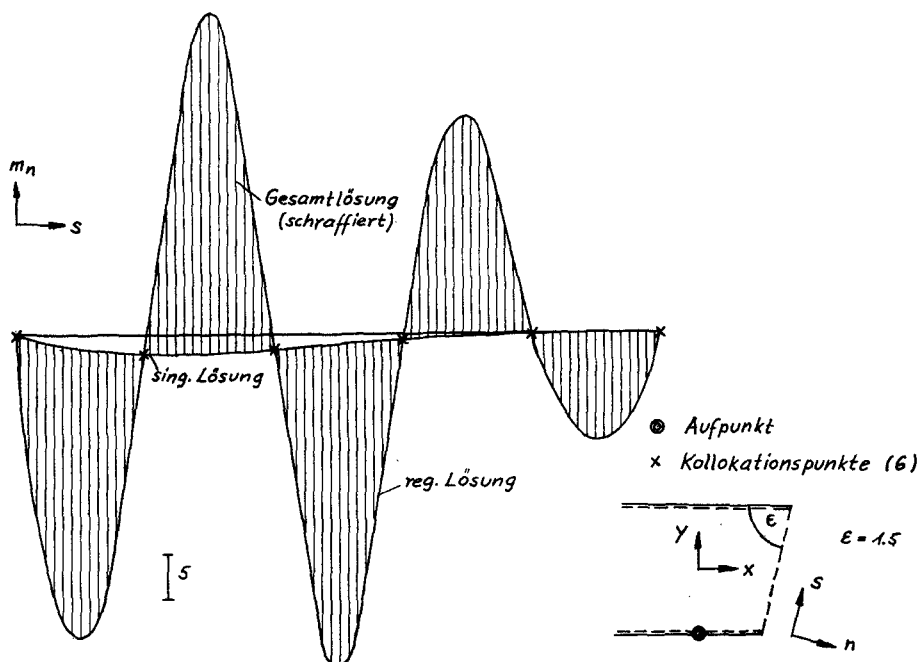


Abb. 12. Randabweichungen der Biegemomente

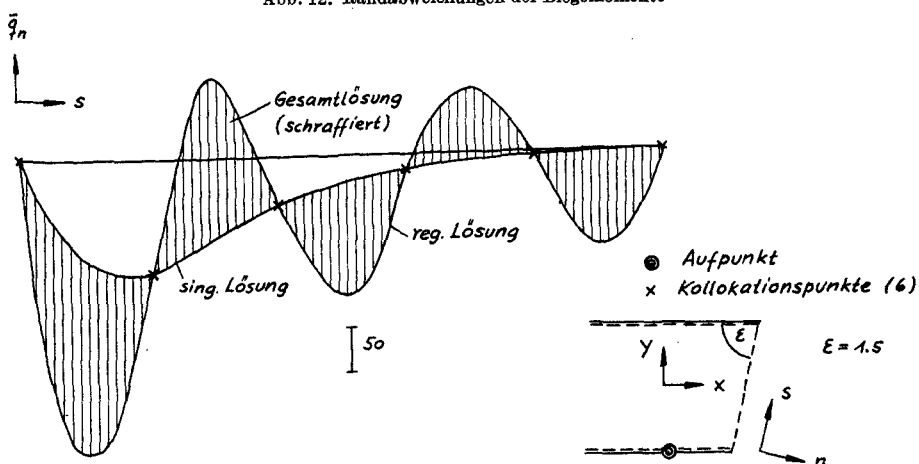
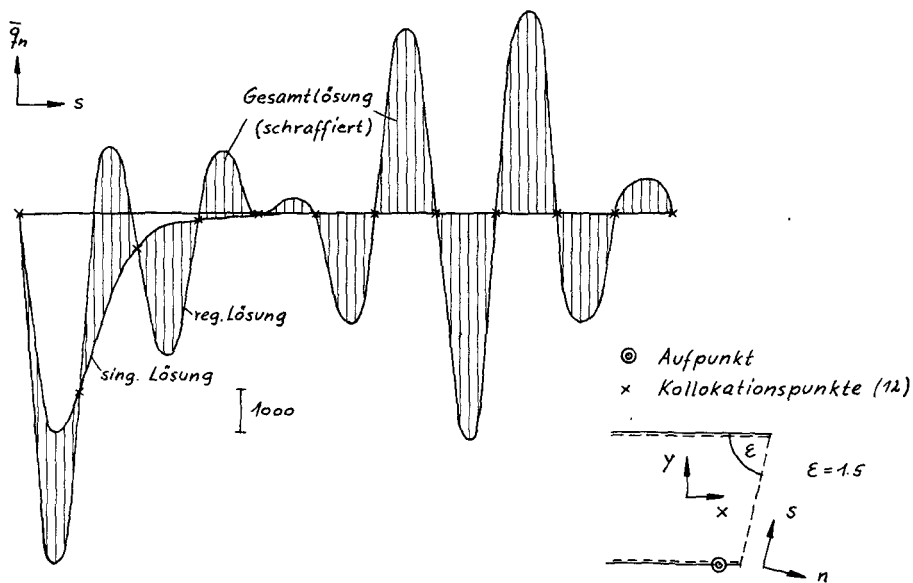
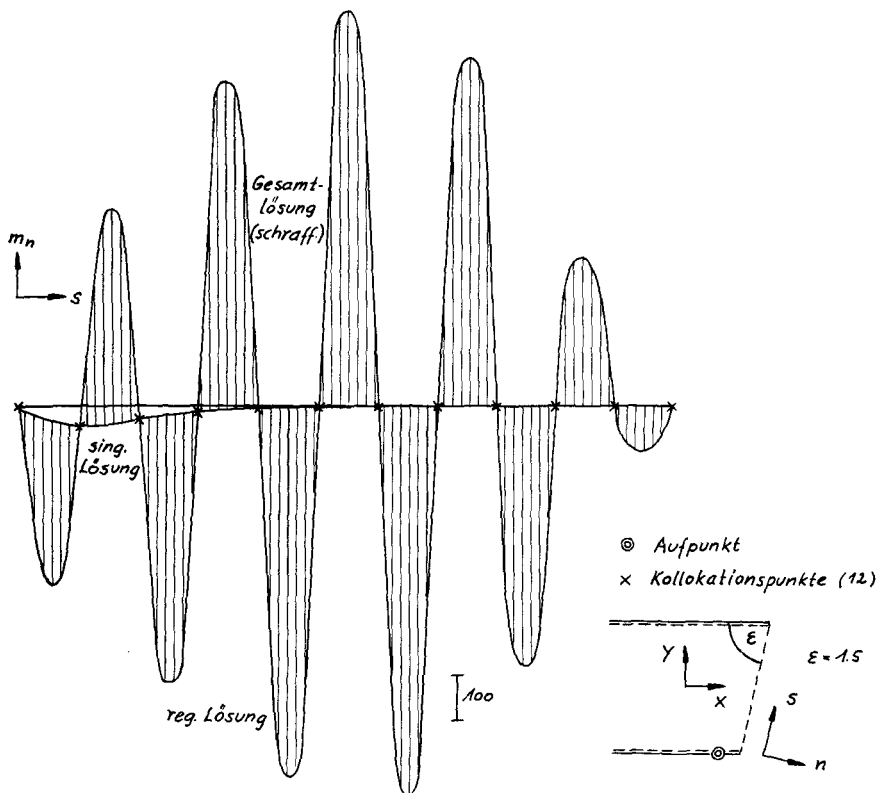


Abb. 13. Randabweichungen der Randquerkräfte





Bei den Ergebnissen der Rechnung mit 6 Kollokationspunkten ist zunächst auffallend, daß die Abweichungen der Randwerte zwischen den Kollokationspunkten ein Vielfaches der Werte der zu verbessernden singulären Lösung betragen. Wie das Beispiel mit 12 Kollokationspunkten zeigt, läßt sich mit mehr Ansatzfunktionen keineswegs eine Verbesserung erzielen. Die Abweichungen werden im Gegenteil noch viel größer, so daß die Lösung völlig unbrauchbar wird. Die Lösung oszilliert mit um so stärkeren Amplituden, je mehr Kollokationspunkte verwendet werden.

## 7.2 Trefftzsches Verfahren

Die Ergebnisse der unter 7.11 und 7.12 beschriebenen Rechnungen zeigen, daß die Kollokationsmethode — jedenfalls in Verbindung mit den gewählten Ansätzen — keine brauchbare Lösung liefert. So wurde, wie schon in 5.2 beschrieben, nach einer anderen Methode zur Erfüllung der Randbedingungen gesucht und hierbei der Grundgedanke des Trefftzschen Verfahrens verwendet. Die Rechnungen wurden wiederum für verschiedene Ansätze durchgeführt.

### 7.21 Homogene Lösung

Um einen Vergleich der Kollokationsmethode mit dem Trefftzschen Verfahren unter gleichen Bedingungen zu erzielen, ist die homogene Lösung trotz ihrer geschilderten ungünstigen Eigenschaften, die hier allerdings wie in 7.12 durch die Wahl einer fast rechtwinkligen Platte weitgehend ausgeschaltet wurden, noch einmal als Ansatz für den Regularteil verwendet worden. Einen Teil der bei diesen Rechnungen erhaltenen Ergebnisse zeigen die Abbildungen 16 und 17. Für das gleiche\*), schon im vorigen Abschnitt verwendete Beispiel sind die Randwertabweichungen längs des freien Randes aufgetragen.

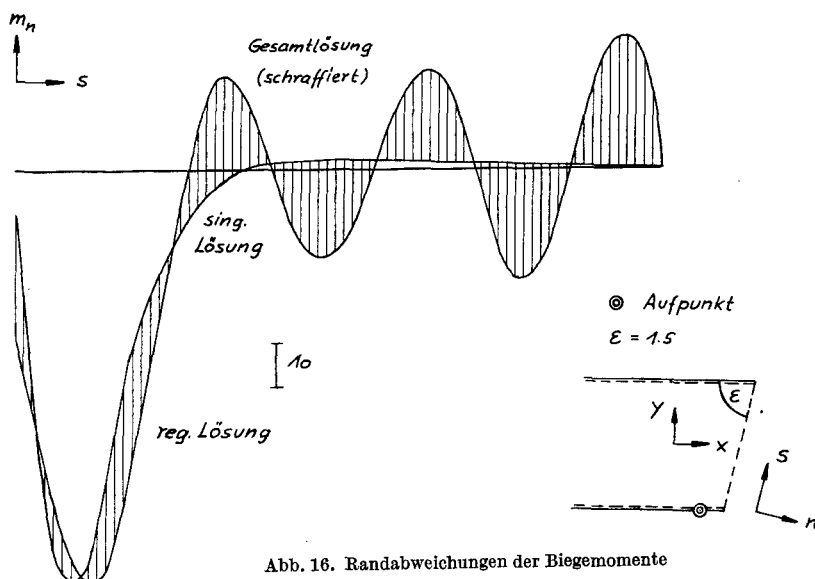


Abb. 16. Randabweichungen der Biegemomente

\*) Ein geringfügiger Unterschied besteht nur in der Lage des Aufpunktes.

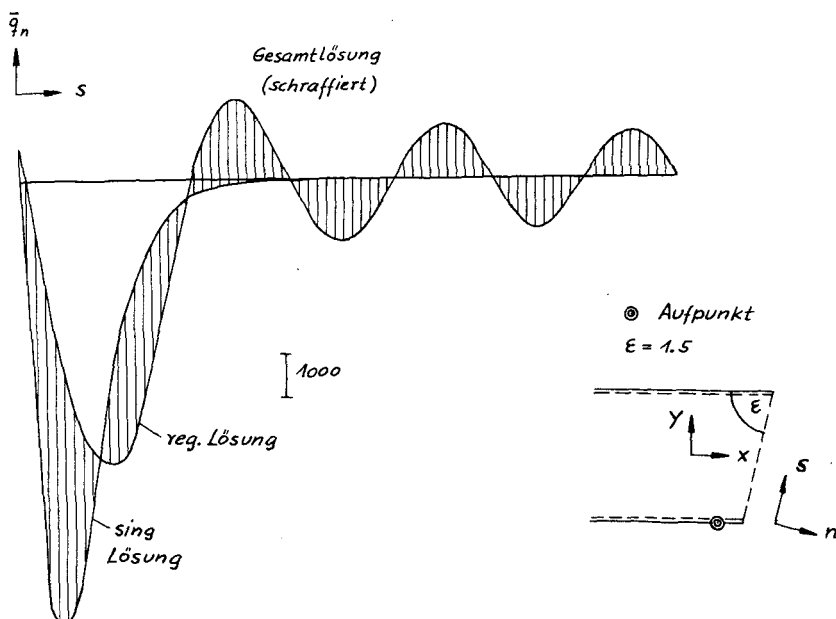
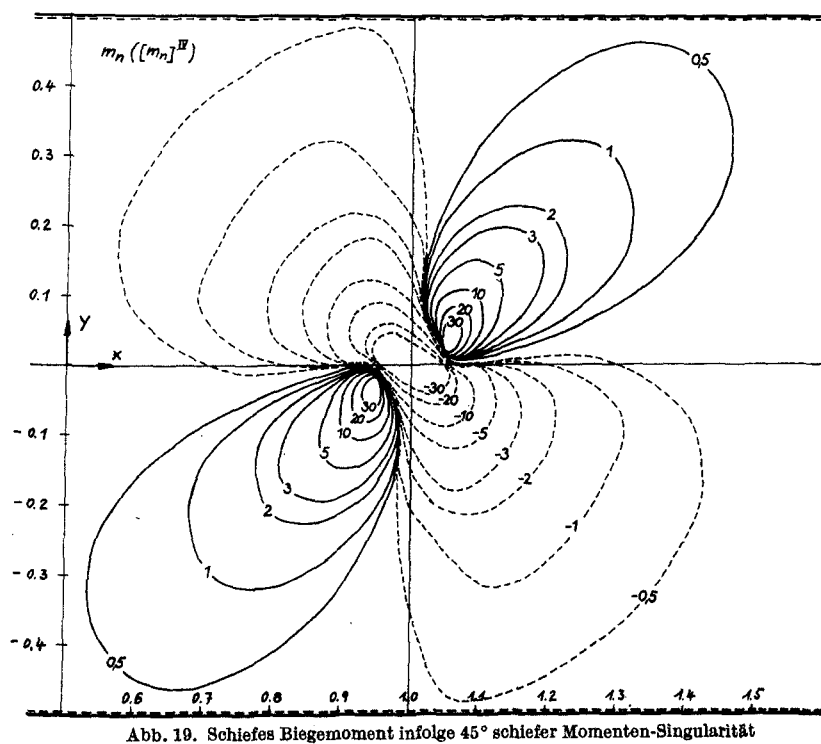
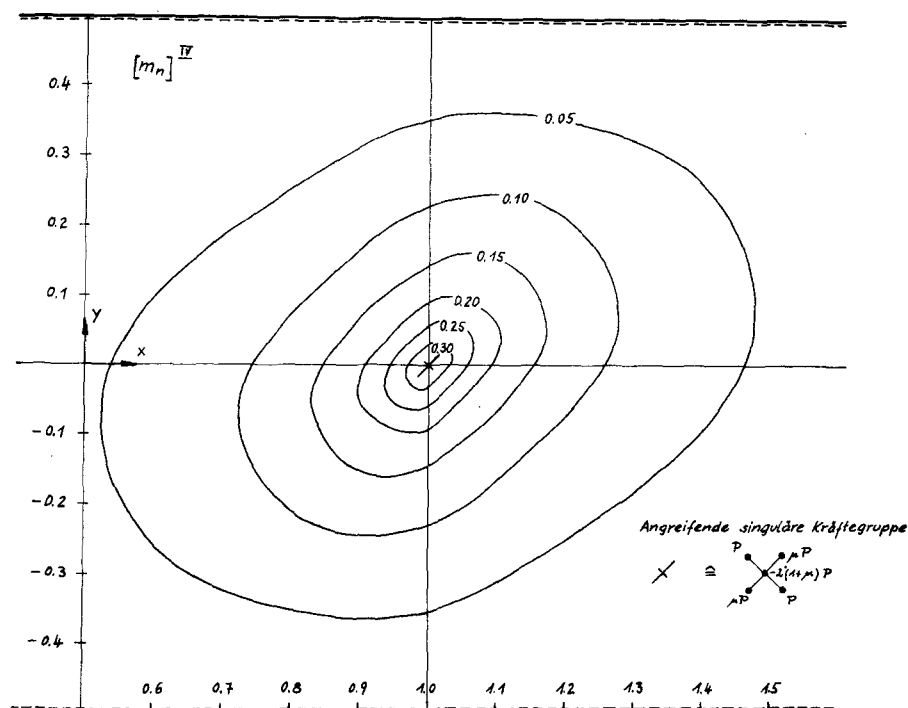


Abb. 17. Randabweichungen der Randquerkräfte

Der Vergleich mit den Ergebnissen aus 7.2 (Abb. 12 und 13) läßt erkennen, daß mit dem nach *Trefftz* hergeleiteten Verfahren bei gleicher Zahl von Ansatzfunktionen die Randbedingungen schon wesentlich besser erfüllt werden können. Betragen die Randwertabweichungen bei der Kollokationsmethode noch ein Vielfaches des Maximalwertes der singulären Lösung (vgl. Abb. 12), so sind es hier nur noch ca. 30 % davon (vgl. Abb. 16). Trotzdem sind die Abweichungen vor allem in dem Bereich, wo der Singularteil praktisch gleich Null ist, noch viel zu groß.

### 7.22 Höhere Singularitäten

Die bisher geschilderten Ergebnisse haben gezeigt, daß von den verwendeten Ansätzen weder die Einzellast-Singularitäten noch die homogene Lösung zu befriedigen vermochten. Bei den weiteren Rechnungen werden daher jetzt höhere Singularitäten als Ansatzfunktionen benutzt. Gegenüber der homogenen Lösung haben sie z. B. den Vorteil, daß sie vom Aufpunkt weg nach allen Richtungen hin abklingendes Verhalten zeigen und bei ihnen auf Grund ihres Funktionsaufbaues keine derartigen unangenehmen Kopplungserscheinungen auftreten können, wie es z. B. bei der homogenen Lösung der Fall ist. Da diese Funktionen meines Wissens in der Literatur noch nicht verwendet bzw. dargestellt worden sind, ist in den Abbildungen 18 bis 23 ihr Verlauf in Form von Höhenlinienplänen an den Beispielen einer 45° schiefen, in der Mitte des Plattenstreifens angreifenden Biegemomenten- und Randquerkraft-Singularität dargestellt. Die günstigste Anordnung der Ansatz-Singularitäten läßt sich danach festlegen.



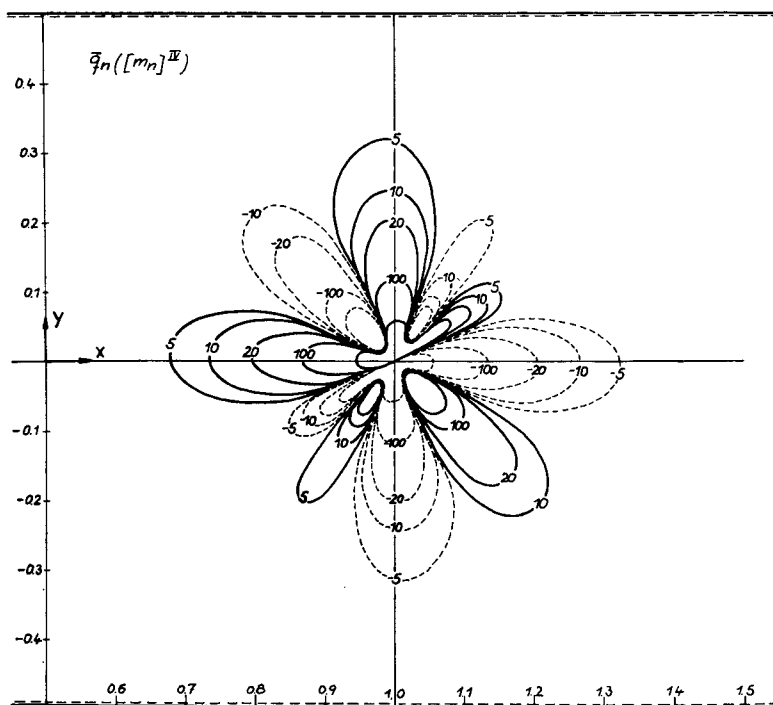


Abb. 20. Randquerkraft infolge 45° schiefer Momenten-Singularität

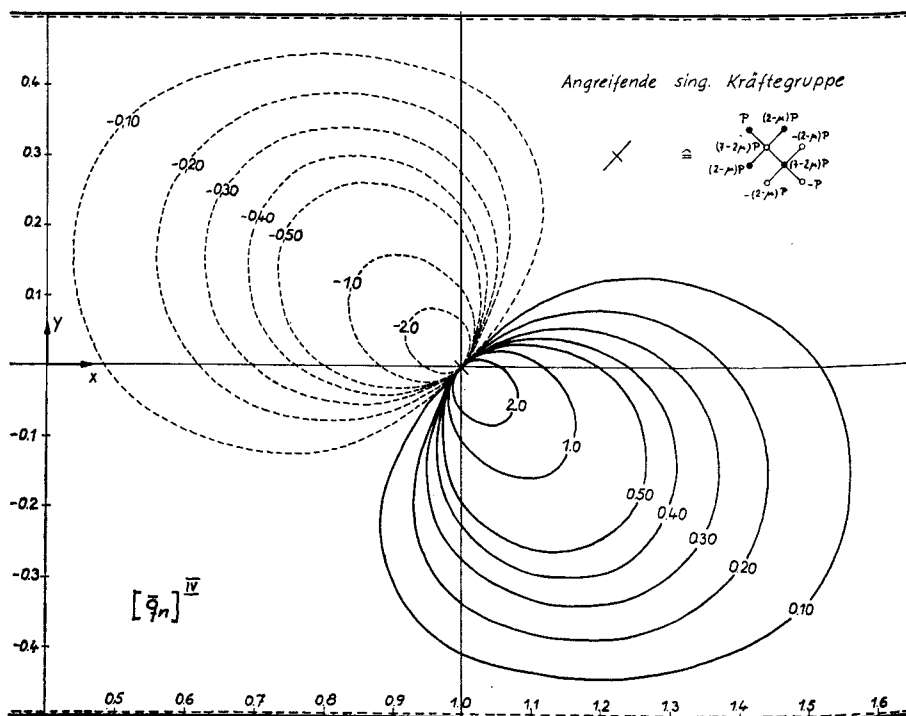


Abb. 21. Biegefläche infolge 45° schiefer Randquerkraft-Singularität

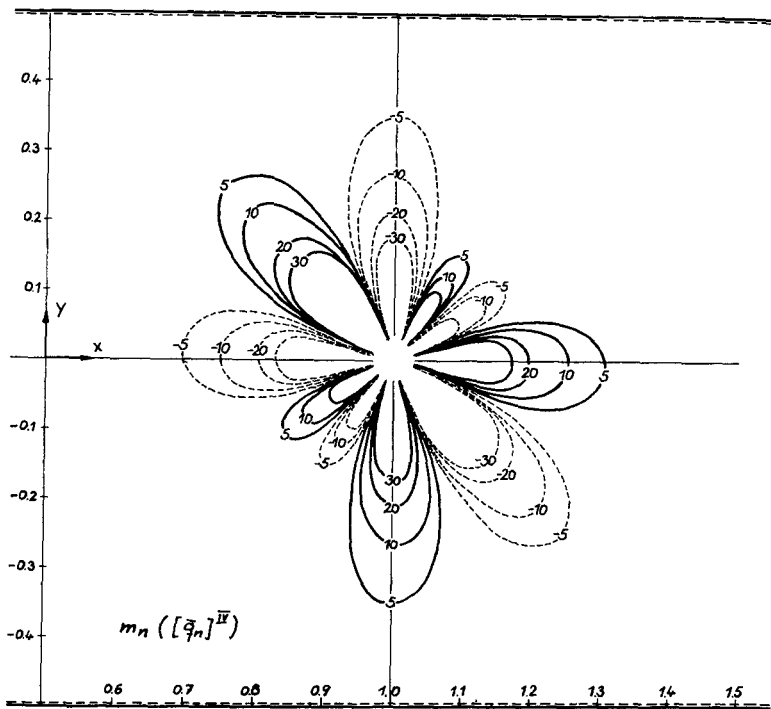


Abb. 22. Schiefes Biegemoment infolge 45° schiefer Randquerkraft-Singularität

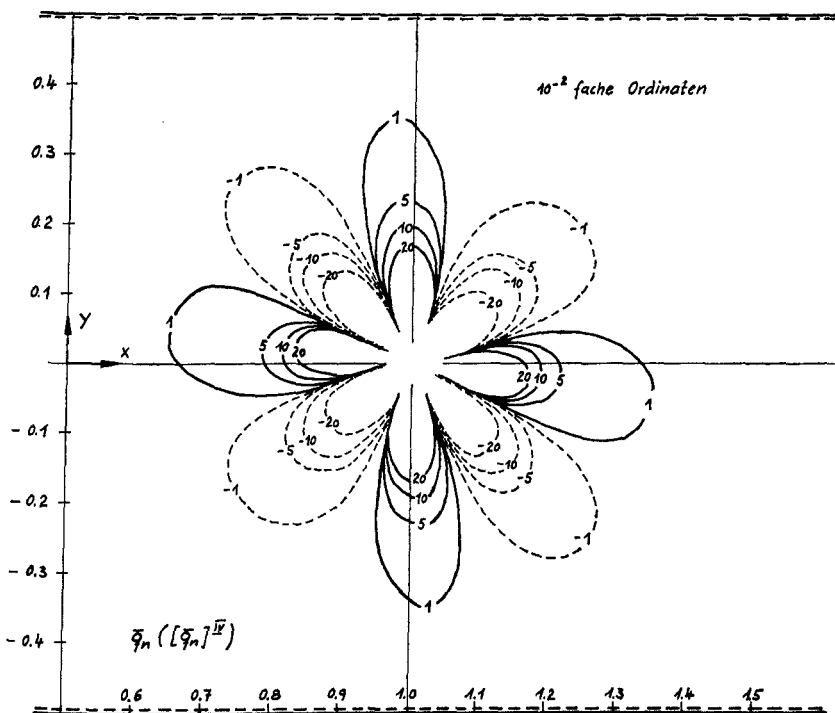


Abb. 23. Randquerkraft infolge 45° schiefer Randquerkraft-Singularität

Ein weiterer Vorteil der höheren Singularitäten besteht darin, daß man den Ansatz durch eine günstige Wahl der Aufpunkte der gegebenen singulären Lösung gut anpassen kann, was bei der homogenen Lösung nicht möglich war.

Der Vergleich der Ergebnisse zweier Rechnungen mit 17 und 26 Ansatzfunktionen für eine Platte mit einem Schiefenwinkel von  $53^\circ$  ergibt, daß auch bei dieser Methode (*Treffitz*) ähnlich wie bei der Kollokation die Randabweichungen mit zunehmender Anzahl der Ansatzfunktionen größer werden. Diese Erscheinung ist also auch unabhängig von der Art der verwendeten Ansatzfunktionen. Die endgültige Lösung oszilliert mit Amplituden, die bei den erwähnten Beispielen wieder ein Vielfaches der Maximalwerte der Grundlösung betragen. Die Endergebnisse sind dementsprechend nicht verwendbar.

### 7.3 Fehlerquadratmethode

Mit 13 Momenten- und 13 Querkraft-Singularitäten als Ansatzfunktionen ist wieder die  $53^\circ$  schiefe Platte durchgerechnet worden. Für die Koeffizienten des zu lösenden linearen Gleichungssystems (92) (vgl. 5.3) ergeben sich hier folgende Integralausdrücke:

$$a_{ik} = \int_S m_i m_k ds + \lambda \int_S \bar{q}_i \bar{q}_k ds,$$

$$r_i = - \left\{ \int_S m(S) m_k ds + \lambda \int_S \bar{q}(S) \bar{q}_k ds \right\}.$$

Diese Integralausdrücke lassen sich nicht geschlossen auswerten, so daß numerisch integriert werden muß. Zu diesem Zweck wird der Randwertverlauf der Singularlösung und der Ansatzfunktionen für 47 Stützpunkte längs des freien Randes berechnet. Zur Verminderung des Rechenaufwandes

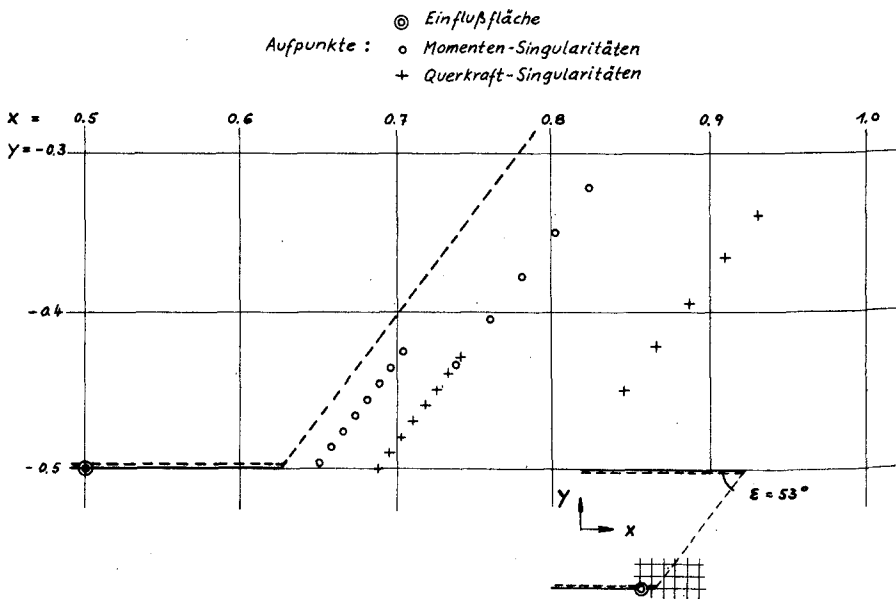


Abb. 24. Verteilung der Ansatz-Singularitäten

wird eine variable Intervallteilung für die numerische Integration verwendet. Die Aufpunkte der Ansatz-Singularitäten werden im Bereich der maximalen Ordinaten des Singularteiles konzentriert.

In Abb. 24 ist ihre Verteilung und die Lage der Aufpunkte der Ansatz-Singularitäten angegeben.

Zur Festlegung des Gewichtungsfaktors (vgl. 5.3) ist bei dieser Rechnung das Verhältnis von Biegemoment zur Querkraft der singulären Lösung im Bereich ihrer größten Werte verwendet worden.

Der endgültige Randwertverlauf ist in den Abbildungen 25 und 26 dargestellt. Betrachtet man den Gesamtverlauf der Abweichungen des Biegemomentes längs des freien Randes (Abb. 25 und 26), so muß dieses Ergebnis im Vergleich zu denjenigen aller anderen Methoden als sehr gut bezeichnet werden. Die Erfüllung der Randbedingungen ist bei den Querkraften allerdings noch schlechter als bei den Momenten. Dies ließe sich zweifellos durch eine andere Wahl des Gewichtungsfaktors verbessern. Hierzu wird folgender Vorschlag gemacht. Allgemein lautet die Minimalforderung der Fehlerquadratmethode für den freien Rand

$$\int_s m_n^2 ds + \lambda \int_s \tilde{q}_n^2 ds \rightarrow \min.$$

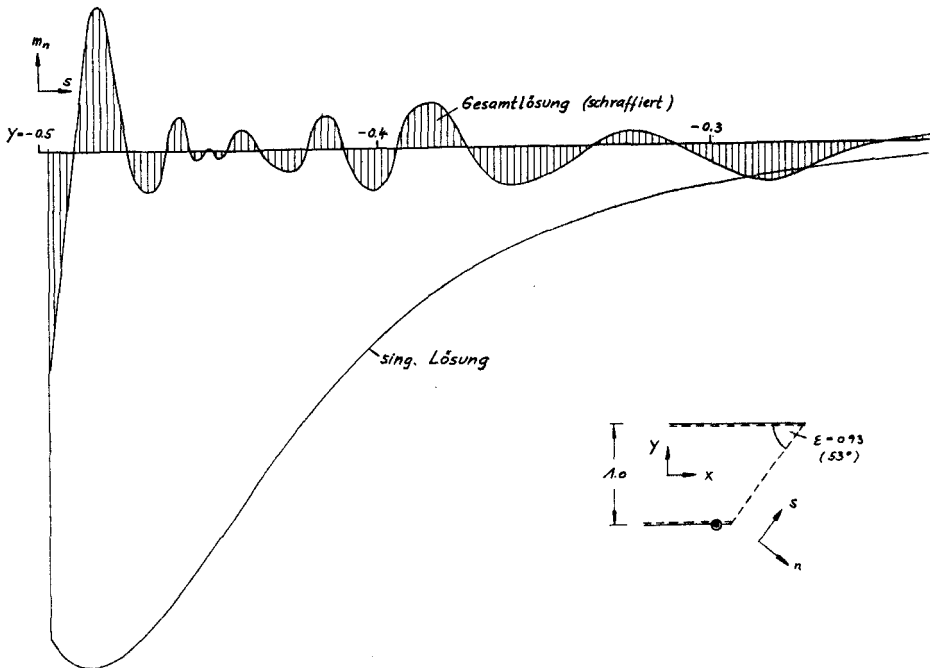


Abb. 25. Randabweichungen der Biegemomente (Teilabschnitt)

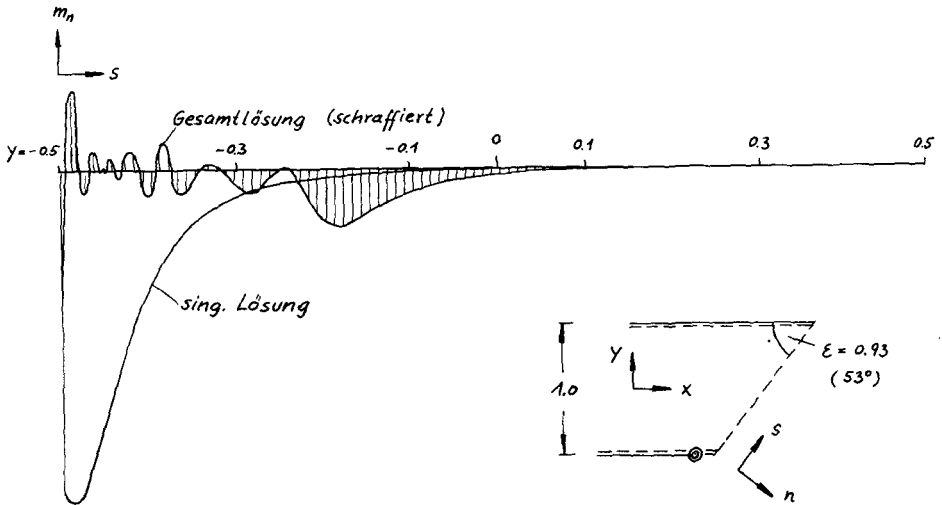


Abb. 26. Randabweichungen der Biegemomente

Wählt man als Bezugswerte, um die beiden verschiedenen Randgrößen im Minimalausdruck dimensionslos zu machen, die entsprechenden Randwerte der singulären Lösung an einer bestimmten Stelle  $a$  des Randes  $s$ , so erhält man

$$m'_n = \frac{m_n}{m_n(S)_{(a)}}, \quad \tilde{q}'_n = \frac{\tilde{q}_n}{\tilde{q}_n(S)_{(a)}},$$

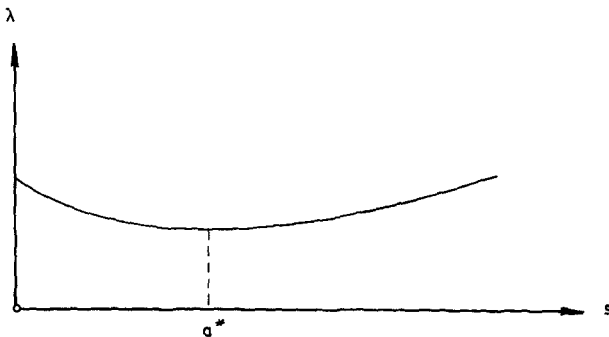
$$\int_s m_n'^2 ds + \int_s \tilde{q}_n'^2 ds \rightarrow \min \quad \text{bzw.}$$

$$\int_s m_n^2 ds + \lambda \int_s \tilde{q}_n^2 ds \rightarrow \min \quad (99)$$

$$\text{mit } \lambda = \left( \frac{m_n(S)}{\tilde{q}_n(S)} \right)^2_{(s=a)}. \quad (100)$$

Der Gewichtungsfaktor  $\lambda$  ist somit von der Wahl der Stelle  $a$  abhängig.

Trägt man  $\lambda(s)$  auf, so ergibt sich beispielsweise folgender Verlauf:

Abb. 27. Gewichtungsfaktor  $\lambda(s)$



Verwendet man  $\lambda_{\min}$  ( $s = a^*$ ) — wie es sich im durchgerechneten Beispiel durch Zufall ergeben hat, da die Stelle der Maximalordinaten der singulären Lösung der Stelle  $a^*$  ungefähr entspricht — so werden die Abweichungen der beiden Randwerte in der Umgebung von  $a^*$  mit gleichem Gewicht berücksichtigt. Im übrigen Randbereich jedoch würden die Querkraftabweichungen mit zu geringem Gewicht in die Rechnung eingehen. Nimmt man  $\lambda_{\max}$ , so gilt das eben Gesagte entsprechend für die Biegemomente. Man muß also für  $\lambda$  einen geeigneten Mittelwert finden, z. B.

$$\lambda = \frac{1}{l} \int_s \left( \frac{m(S)}{\bar{q}(S)} \right)^2 ds. \quad (101)$$

$l$  entspricht hierin der Randlänge. Mit dieser Wahl des Gewichtungsfaktors würde man noch eine bessere und gleichmäßigere Erfüllung der Randbedingungen erzielen. Die Endergebnisse, d. h. die Ordinaten der Auflagerkraft-Einflußflächen, würden sich dabei voraussichtlich noch um einige Prozente ändern. Der Vollständigkeit halber sei jedoch die ermittelte Einflußfläche in Abb. 28 dargestellt.

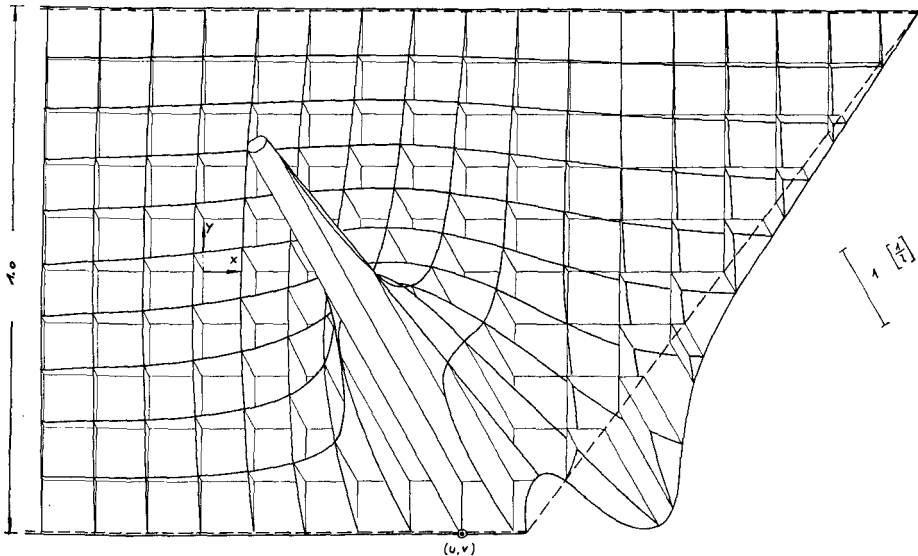


Abb. 28. Randquerkraft-Einflußfläche des schiefen Halbstreifens

Bemerkenswert ist am Verlauf dieser Einflußfläche, daß fast in dem gesamten dreieckigen Gebiet, das zwischen dem freien Rand und einer rechtwinklig zu den gelagerten Rändern gerichteten Geraden durch die stumpfe Ecke liegt, negative Ordinaten auftreten. Hierdurch wird die in Versuchen\*) schon öfter festgestellte Tatsache bestätigt, daß sich für den freien Rand in der stumpfwinkligen Ecke eine Art Einspannung ergibt, die in einem gewissen Abstand von der stumpfen Ecke zu abhebenden Auflagerkräften führt.

\*) z. B. in Homberg-Jäckle-Marx: Einfluß einer elastischen Lagerung auf Biegemomente und Auflagerkräfte schiefwinkliger Einfeldplatten. Bauing. 36 (1961) S. 19.

Zum Vergleich zeigt die Abb. 29 die zugehörige singuläre Lösung, d. h. die Einflußfläche für den Plattenstreifen.

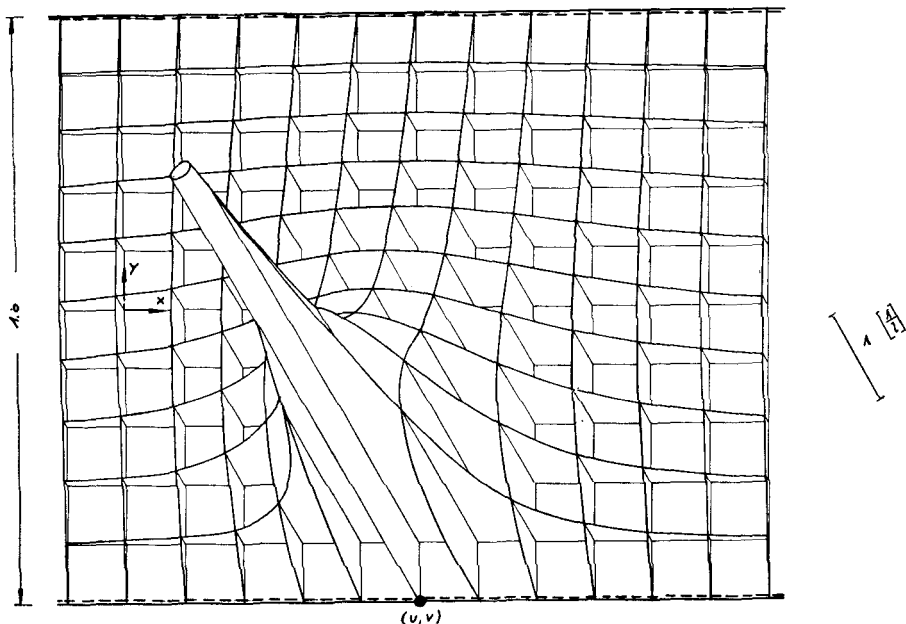


Abb. 29. Randquerkraft-Einflußfläche des Plattenstreifens

#### 7.4 Teilstreckenkollokation

Nach diesem Verfahren ist zum Vergleich mit der normalen Kollokationsmethode ein Beispiel mit 42 höheren Singularitäten\*) als Ansatzfunktionen gerechnet worden. Schon bei der Auflösung des Gleichungssystems ergeben sich hier numerische Schwierigkeiten (kleine Differenzen großer Zahlen). Der Randwertverlauf der Gesamtlösung zeigt den gleichen Charakter wie bei der Kollokation, nämlich sehr starkes Oszillieren um die Nullage. Man erhält zwar auf Grund der Art der gestellten Kollokationsbedingungen (vgl. Abschnitt 5.4) für die Randwerte der Gesamtlösung eine Gleichgewichtsbelastung, jedoch mit so großen Amplituden, daß die Endergebnisse — nämlich die gesuchten Einflußordinaten — als kleine Differenzen großer Zahlen beliebige Zufallswerte darstellen.

### 8. Zur Auswertung der Randquerkraft-Einflußflächen

Im Aufpunkt wird die Randquerkraft-Einflußfläche unendlich. Zur Auswertung dieser Einflußfläche ist daher die Kenntnis des Inhaltes des unendlich hohen Schlauches erforderlich, durch den die Einflußfläche im Bereich des Aufpunktes dargestellt wird.

Pucher hat in [8] das Schlauchvolumen der klassischen Randquerkraft-Singularität ermittelt und angegeben. Da in der vorliegenden Arbeit jedoch hauptsächlich die entartete Randquerkraft-Singularität des Plattenstreifens

\*) Dabei wurde schon die Kapazitätsgrenze der verwendeten Rechanlage erreicht.

verwendet wurde, muß hierfür diese Volumensberechnung neu durchgeführt werden. Wir gehen dabei von der (18) entsprechenden Formel aus, die für das in Abb. 3 angegebene Koordinatensystem gilt.

$$[\bar{q}_y]^{IV} = \frac{3-\mu}{8a} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{a}(y+v)}{\cosh \frac{\pi}{a}(x-u) - \cos \frac{\pi}{a}(y+v)} + \frac{\sin \frac{\pi}{a}(y-v)}{\cosh \frac{\pi}{a}(x-u) - \cos \frac{\pi}{a}(y-v)} \right\} \\ - (1-\mu) \frac{\pi}{8a^2} (x-u) \sinh \frac{\pi}{a}(x-u) \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{a}(y+v)}{\left[ \cosh \frac{\pi}{a}(x-u) - \cos \frac{\pi}{a}(y+v) \right]^2} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \frac{\pi}{a}(y-v)}{\left[ \cosh \frac{\pi}{a}(x-u) - \cos \frac{\pi}{a}(y-v) \right]^2} \right\} \quad (102)$$

Wir legen den Aufpunkt in den Koordinatenursprung ( $u=v=0$ ) und erhalten

$$[\bar{q}_y]^{IV} = \frac{3-\mu}{4a} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{a}y}{\cosh \frac{\pi}{a}x - \cos \frac{\pi}{a}y} \right\} - \frac{1-\mu}{4a^2} \pi x \sinh \frac{\pi}{a}x \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{a}y}{\left[ \cosh \frac{\pi}{a}x - \cos \frac{\pi}{a}y \right]^2} \right\} \quad (103)$$

Die Kreis- und Hyperbelfunktionen werden durch ihre Reihenentwicklungen ersetzt, die nach den quadratischen Gliedern abgebrochen werden können, da ja die Umgebung des Aufpunktes ( $x=y \rightarrow 0$ ) betrachtet wird.

$$[\bar{q}_y]^{IV} = \frac{3-\mu}{4a} \left\{ \frac{\frac{\pi}{a}y}{1 + \left(\frac{\pi}{a}x\right)^2 \frac{1}{2!} - 1 + \left(\frac{\pi}{a}y\right)^2 \frac{1}{2!}} \right\} - \frac{1-\mu}{4a^3} \pi^2 x^2 \left\{ \frac{\frac{\pi}{a}y}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[ \left(\frac{\pi}{a}x\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}y\right)^2 \right]^2} \right\} \\ = \frac{3-\mu}{2\pi} \left\{ \frac{y}{x^2+y^2} \right\} - \frac{1-\mu}{\pi} \left\{ \frac{yx^2}{(x^2+y^2)^2} \right\} \quad (104)$$

Mit Einführung von Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi$$

erhält man

$$[\bar{q}_y]^{IV} = \frac{3-\mu}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{1-\mu}{\pi} \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r}, \\ = \frac{1}{r} \left( \frac{1+\mu}{2\pi} \sin \varphi + \frac{1-\mu}{\pi} \sin^3 \varphi \right) = h. \quad (105)$$

Durch diese Funktion wird die Einflußfläche in der Umgebung des Aufpunktes beschrieben. Wir wollen sie im folgenden mit  $h$  bezeichnen. Setzt man  $h = \text{const}$ , so gibt  $r(\varphi)$  den Verlauf der Höhenlinie  $h$  im Grundriß an:

$$r = \frac{1}{h\pi} \left( \frac{1+\mu}{2} \sin \varphi + (1-\mu) \sin^3 \varphi \right). \quad (106)$$

Die Fläche eines Horizontalschnittes beträgt

$$F(h) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(h, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2h^2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1+\mu}{2} \sin \varphi + (1-\mu) \sin^3 \varphi \right]^2 d\varphi. \quad (107)$$

Die Integration ergibt

$$F(h) = \frac{1}{2h^2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1+\mu}{2} \right)^2 + \frac{3}{8} (1+\mu)(1-\mu) + \frac{5}{16} (1-\mu)^2 \right\} = \frac{c}{h^2\pi} \quad (108)$$

Für das Schlauchvolumen erhält man

$$V(h) = \int_h^\infty F(h) dh = \frac{c}{\pi} \int_h^\infty \frac{1}{h^2} dh = \frac{c}{\pi h} \quad (109)$$

wobei  $c$  als Funktion von  $\mu$  aus (108) zu ermitteln ist.

Mit dieser Angabe des über der Höhe  $h$  liegenden Einflußkörpervolumens läßt sich die Randquerkraft-Einflußfläche auch im Bereich des Aufpunktes mit großer Genauigkeit auswerten. Die Ordinaten der Randquerkraft-Einflußfläche haben die Dimension  $1/m$ .

Bei den numerischen Rechnungen ist durchweg die Plattenbreite  $a = 1$  gesetzt worden. Für eine Platte der Breite  $a$  ergibt sich somit für die Randquerkraft im Aufpunkt  $(u, v)$  infolge einer Einzellast  $P$  im Punkte  $(x, y)$ :

$$\bar{q}_y = [\bar{q}_y]_{(x,y)} \frac{P[\text{kp}]}{a[\text{m}]} [\text{kp/m}].$$

## 9. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Möglichkeiten zur Ermittlung der Auflagerkraft-Einflußflächen gelenkig gelagerter schiefwinkliger Platten mit freien Rändern. Viele fehlgeschlagene Versuche haben gezeigt, daß die bisher verwendeten Verfahren, die bei der Ermittlung von Einflußflächen für Durchbiegungen und Biegemomente bei großer Entfernung des Aufpunktes von den schiefen Rändern noch gute Ergebnisse liefern, bei der hier gestellten Aufgabe versagen. So mußte nach neuen Wegen gesucht werden.

Von den in der Einleitung erwähnten drei Teilaufgaben ist die erste — die Aufstellung einer passenden singulären Lösung — durch die Ableitung der modifizierten, entarteten Randquerkraft-Singularität des Plattenstreifens gelöst worden.

Für die zweite Aufgabe ergab sich als beste Lösung, den Regularteil aus den höheren Singularitäten des Plattenstreifens aufzubauen. Dieses Ergebnis läßt sich außerdem verallgemeinern und lautet genauer ausgedrückt folgendermaßen:

Bei der Ermittlung von Einflußflächen für beliebige Kraft- oder Verformungsgrößen schiefwinkliger Platten baut man zweckmäßig den regulären Lösungsanteil aus den Funktionen der „zugehörigen“ höheren Singularitäten auf. Die zugehörigen Singularitäten sind den Kraft- oder Verformungsgrößen zugeordnet, die in den mit Hilfe des Regularteils zu erfüllenden Randbedingungen vorkommen.

Die Untersuchungen zu Punkt 3 haben schließlich durch Vergleich der verschiedenen Verfahren ergeben, daß im vorliegenden Fall, bei dem die zusätzlichen Randbedingungen Kraftgrößen betreffen, die Fehlerquadratmethode allein brauchbare Ergebnisse liefert. Die schlechtesten Resultate bringen die Kollokation und die Teilstreckenkollokation, während die analog dem Trefftz-schen Verfahren ermittelten Werte eine Mittelstellung einnehmen.

Das Ergebnis der Untersuchungen zu Punkt 3 sei noch einmal zusammengefaßt und sinngemäß verallgemeinert.

Bestehen die zusätzlichen Randbedingungen aus Kräftebedingungen, dann ist die Fehlerquadratmethode zu verwenden, wobei dem evtl. auftretenden Gewichtungsfaktor (vgl. 7.3) besondere Beachtung zu schenken ist. Sind die zusätzlichen Randforderungen rein geometrischer Art, dann dürfte das Trefftz-sche Verfahren mindestens ebenso gute Ergebnisse liefern, wie die Fehlerquadratmethode; es ist aber der letzteren Methode wegen der Vermeidung des willkürlichen Gewichtungsfaktors vorzuziehen. Evtl. dürften in diesem Fall auch noch mit den Kollokationsmethoden brauchbare Ergebnisse zu erzielen sein.

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Methode abgeleitet, um Einflußflächen der Randquerkräfte zweiseitig gelenkig gelagerter schiefwinkliger Platten mit freien Rändern zu ermitteln. Der angegebene Lösungsweg dürfte auch bei den Einflußflächen für beliebige andere Kraft- oder Verformungsgrößen und bei beliebigen anderen Auflagerbedingungen gangbar sein.

## Literaturverzeichnis

- [1] *Nadai, A.*, Die elastischen Platten. Berlin 1925, S. 86.
- [2] *Trefftz, E.*, Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Verhandlungen des 2. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik. Zürich 1926.
- [3] *Nemenyi, P.*, Eine neue Singularitätenmethode für die Elastizitätstheorie. ZAMM 9 (1929), S. 488.
- [4] *Nemenyi, P.*, Über die Singularitäten der Elastizitätstheorie. ZAMM 10 (1930), S. 383.
- [5] *Pucher, A.*, Momenteneinflussfelder rechteckiger Platten. Habilitationsschrift Berlin 1936.
- [6] *Anzelius, A.*, Über die elastische Deformation parallelogrammförmiger Platten. Bauing. 20 (1939), S. 478.

- [7] *Vogt, H.*, Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten. Dissertation Hannover 1939.
- [8] *Pucher, A.*, Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten. *Ing.-Arch.* **12** (1941), S. 76.
- [9] *Favre, H.*, Contribution à l'étude des plaques obliques. *Schweizerische Bauzeitung* 1942, S. 35, 51 und 60.
- [10] *Pucher, A.*, Rechteckplatten mit zwei eingespannten Rändern. *Ing.-Arch.* **14** (1943), S. 259.
- [11] *Nielsen, N. J.*, Skaevinklede Plader. Ingeniorvidenskabelige Skrifter 1944, Nr. 3 Kopenhagen.
- [12] *Graudenz, H.*, Beitrag zur Berechnung der Momenten-Einflußfelder schiefwinkliger Platten. Dissertation Hannover 1948.
- [13] *Lardy, P.*, Die strenge Lösung des Problems der schiefen Platte. *Schweizerische Bauzeitung* 1949, S. 207.
- [14] *Haeussler, E.*, Beitrag zur Berechnung von Einflußflächen umfangsgelagerter Platten. Dissertation Hannover 1951.
- [15] *Schultz-Grunow, F.*, Greensche Funktionen für elastische Platten. *ZAMM* **33** (1953), S. 227.
- [16] *Berger, E. R.*, Ein Minimalprinzip zur Auflösung der Plattengleichung. *Österr. Ing.-Arch.* **7** (1953), S. 39.
- [17] *Büscher, G.*, Beitrag zur praktischen Ermittlung von Einflußflächen schiefwinkliger Platten. Dissertation Aachen 1955.
- [18] *Kärrholm, G.*, Parallelogram Plates Analysed by Strip Method. Doktorsavhandlingar vid Chalmers Tekniska Högskola Nr. 11, Göteborg 1956.
- [19] *Heinen, R.*, Beitrag zur Berechnung von Einflußflächen schiefwinkliger Platten. Dissertation Aachen 1957.
- [20] *Rüdiger, D.*, Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie elastischer Körper. *Ing.-Arch.* **27** (1960), S. 421.
- [21] *Rüdiger, D.*, Ein neues Variationsprinzip in der Elastizitätstheorie. *Ing.-Arch.* **30** (1961), S. 220.
- [22] *Maas, O.*, Berechnung der Einflußflächen schiefwinkliger Platten. Dissertation Aachen 1962.